LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
ENDIMENSIONELL ANALYS B2/A3
2020–01–11 kl. 8–13

INGA HJÄLPMEDEL. Lösningarna ska vara försedda med ordentliga motiveringar. Varje uppgift kan som mest ge 3 poäng.

Godkäntdel

För att bli godkänd krävs dels högst en uppgift med 0 poäng av dessa sex uppgifter, dels minst 9 poäng av 18 möjliga.

1. Lös de två begynnelsevärdesproblemen

$$y' + y = x, \quad y(0) = 1, \qquad \text{och} \qquad y' \cdot y = x, \quad y(0) = 1.$$

2. Betrakta området mellan kurvstycket

$$y = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}, \qquad 0 \le x \le 2,$$

och x-axeln. Beräkna områdets area. Beräkna även volymen av den kropp som bildas då området roterar kring x-axeln.

3. Avgör om det går att bestämma ett polynom $p(x)$ sådant att

$$|\ln(1+2x) - p(x)| \le 3|x|^3 \qquad \text{för alla } x \ge 0.$$

Ange i så fall $p(x)$.

4. Bestäm alla lösningar till differentialekvationen

$$y'' - y' - 2y = xe^x.$$

5. Avgör om den generaliserade integralen

$$\int_1^\infty \frac{2}{x^3+x}\,dx$$

är konvergent, och ange i så fall dess värde. Avgör även om

$$\int_1^\infty \frac{2}{x^3+e^{-x}}\,dx$$

är konvergent. (Du behöver inte bestämma dess värde.)

6. Bestäm alla lösningar till ekvationen

$$z^2 - 2z + 4 - 4i = 0.$$

Bestäm också alla lösningar till ekvationen

$$z^3 - (2+i)z^2 + (4-2i)z - 4 - 4i = 0,$$

givet att $z = i$ är en lösning.

VAR GOD VÄND!

Överbetygsdel

Om du klarat föregående del har du chans på överbetyg. För att få betyg 4 krävs minst 4 poäng på denna del. För betyg 5 krävs minst 7 poäng.

7. När pirater pensioneras flyttar de till Cirkulära Ön, som har formen av en cirkelskiva med radie 10 km. Då de levt hela sitt liv på havet vill de nu bo så långt ifrån det som möjligt. Således är piratdensiteten $\rho(x)$ på ön proportionell mot (kortaste) avståndet x till kusten, med störst värde $\frac{150}{\pi}$ pirater/km^2 mitt på ön. Bestäm det totala antalet pirater på ön.

8. Två sjöar ligger längs ett vattendrag. Rent vatten rinner till den första sjön, vatten från den första sjön rinner till den andra sjön, och vatten från den andra sjön rinner vidare i vattendraget. Både in- och utflöde till/från vardera sjön är 500 m^3 per timme. Den första sjön innehåller 10^5 m^3 vatten, och den andra $2 \cdot 10^5$ m^3.

Vid en viss tidpunkt kraschar en lastbil med 8 ton giftigt material i den första sjön. Bestäm mängden giftigt material i den *andra* sjön som funktion av tiden. (Antag att allt gift omedelbart hamnar i sjön, och att volymen i sjöarna inte påverkas av detta. Antag också att allt vatten hålls fullständigt blandat av vattendraget, samt att tiden det tar för vattnet att rinna från den första till den andra sjön är försumbar.)

Ledning: Bestäm först mängden gift i den första sjön som funktion av tiden.

9. Visa att

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} = \frac{1}{2}.$$

Ledning: Använd integraluppskattning och instängning.

10. Bestäm alla kontinuerligt deriverbara funktioner $f : [0,\infty[\to [0,\infty[$ sådana att det för alla $a,b \in [0,\infty[$ gäller att arean under kurvan $y = f(x)$ från $x = a$ till $x = b$ är samma som längden av kurvan $y = f(x)$ från $x = a$ till $x = b$ (dvs. dessa har samma mätetal).

LYCKA TILL!