

INGA HJÄLPMEDEL. Lösningarna ska vara försedda med ordentliga motiveringar.
Lämna tydliga svar om så är möjligt.

1. a) Vilket komplext tal får man om man roterar talet $1 + i$ vinkeln $\pi/3$ moturs och sedan förlänger med 3? Svara på formen $a + bi$. (0.5)

b) Lös ekvationen $z^2 - (1 + 2i)z = 1 - i$. (0.5)

2. a) Beräkna integralen $\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$. (0.3)

b) Bestäm $\int \frac{e^x dx}{e^{2x} + 5e^x + 6}$. (0.4)

c) Bestäm alla funktioner f sådana att $(e^{2x} f(x))' = \frac{1}{1 + x^2}$. (0.3)

3. a) Bestäm den allmänna lösningen till ekvationen $y'' - 3y' + 2y = \sin x$. (0.6)

b) Formulera skivformeln för beräkning av volymen av en kropp och motivera varför den är sann. (0.4)

4. a) Från en nyupptäckt oljefyndighet beräknas man efter t månader kunna utvinna olja med en hastighet av $300e^{-0.03t}$ fat råolja per månad, och då beräknas oljepriset vara $110 + 0.3t$ dollar/fat. Om oljan säljs i samma ögonblick som den utvunnits, hur stor blir den totala inkomsten från fyndigheten, om vi antar att den används i all evighet? (0.5)

b) Bestäm längden av kurvstycket som ges av $y = \frac{2}{3}(x - 1)^{3/2}$, $1 \leq x \leq 2$. (0.5)

5. En behållare för färskvatten har formen av den skål som uppkommer då kurvan $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$ roteras runt y -axeln (enhet: meter).

a) Visa att då vattenytan är h meter över behållarens lägsta punkt innehåller behållaren $\pi h^2/2$ m³ vatten. (0.4)

b) En spricka i botten av behållaren gör att vatten börjar läcka ut med en hastighet som är proportionell mot \sqrt{h} . När sprickan uppkom var behållaren full och i det ögonblicket rann det ut 10 L/timme. Om inget vatten tillförs, efter hur lång tid är behållaren tom? (0.4)

c) När behållaren är fylld till halva höjden börjar det regna. Hur mycket måste det regna (mätt i mm per timme) för att vattennivån ska vara konstant under regnet? (0.2)

6. Låt $y(x)$ vara den kontinuerliga lösningen till ekvationen

$$y(x) = x + \int_0^x \sin(y(t)) dt.$$

a) Bestäm Maclaurinpolynomet av ordning 3 till $y(x)$. (0.4)

b) Bestäm den inversa funktionen till $y(x)$. (0.4)

c) Bestäm $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x)$. (0.2)

Lycka till!