LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
ENDIMENSIONELL ANALYS
DELKURS B2/A3
2016–08–19 14–19

INGA HJÄLPMEDEL. Lösningarna ska vara försedda med ordentliga motiveringar. Lämna tydliga svar om så är möjligt.

1. a) Talet $z = 1+3i$ löser ekvationen $z^4+16z^2+100 = 0$. Bestäm de övriga lösningarna till ekvationen. (0.6)

b) Bestäm alla komplexa tal z som uppfyller $|z-2| \le |z+2|$. (0.4)

2. a) Skriv upp Maclaurins formel med Lagranges restterm. Förklara de beteckningar du använder. (0.3)

b) Använd Maclaurinutveckling för att visa att olikheten

$$\left|\sqrt{1+2x} - 1 - x\right| \le \frac{x^2}{2}$$

gäller för alla $x \ge 0$. (0.7)

3. a) Motivera den så kallade skivformeln $\int_a^b A(x)dx$ för volymen av en kropp. (0.3)

b) Låt S vara den yta som ligger ovanför den positiva x-axeln, men under kurvan

$$y = \frac{x^{-1/4}}{\sqrt{x+1}} \quad \text{där} \quad x \ge 1.$$

Bestäm volymen av den rotationskropp som uppkommer då ytan S roterar runt x-axeln. (0.7)

4. a) Bestäm $\displaystyle\int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{1+x}}$. (0.7)

b) Hur man kan avgöra om en generaliserad integral konvergerar genom att jämföra med en annan generaliserad integral? Motivera dina påståenden. (0.3)

5. a) Beräkna $y(\pi)$ om $y(x)$ är den kontinuerligt deriverbara funktion som är sådan att

$$y''(x) + y(x) = \begin{cases} 1 & \text{då } x < \frac{\pi}{2} \\ 2 & \text{då } x > \frac{\pi}{2} \end{cases}, \quad y(0) = y'(0) = 0. \qquad (0.7)$$

b) Bestäm alla positiva nollställen till funktionen $f(x) = \displaystyle\int_{1/x}^{x} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$. (0.3)

6. En population fiskar som lever i en lagun växer exponentiellt med en relativ tillväxthastighet av 0.3% per dag. Vid en viss tidpunkt upptäcks populationen av en grupp delfiner i området som börjar äta av dem. Per dag äter de upp $0.001 \cdot N^2$ fiskar per m^3, där N är antalet fiskar per m^3. Sedan delfinerna kommit lämnar 0.002 fiskar per m^3 och dag lagunen. Om det när delfinerna kom till platsen fanns 20 fiskar/m^3, bestäm ett uttryck för koncentrationen fiskar t dagar senare.

Lycka till!