LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

LÖSNINGAR
ENDIMENSIONELL ANALYS B1
2019-10-26

1. Svar:

a) $x = 2$ eller $x = 3$.

b) $-4 < x < -\frac{7}{2}$.

c) -2.

d) $v = 60°$ och $v = 120°$.

e) $y = 2x - 7$.

f) $(x - 2)(x - 1)$.

2. Svar:

$$\frac{1}{2}, \qquad \frac{1}{2}, \qquad e^{2x}\left(2\sin(\cos x) - \cos(\cos x)\sin x\right).$$

Lösning: För det första gränsvärdet får vi

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\sin 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} \frac{2x}{\sin 2x} \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

där vi har använt två standardgränsvärden.
För det andra får vi

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2 - x} + x\right) &= \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2 - x - x^2}{\sqrt{x^2 - x} - x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{-x}{-x\sqrt{1 - \frac{1}{x}} - x} \\ &= \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x}} + 1} = \frac{1}{2},\end{aligned}$$

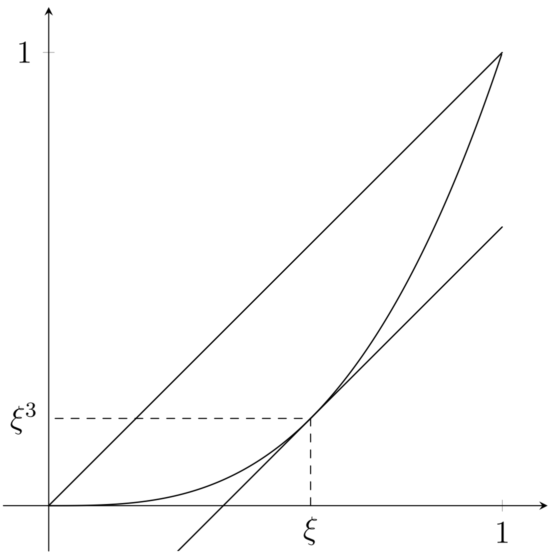
där vi har använt att $\sqrt{x^2} = |x| = -x$ då $x < 0$.
För derivatan använder vi produkt- och kedjeregeln och får

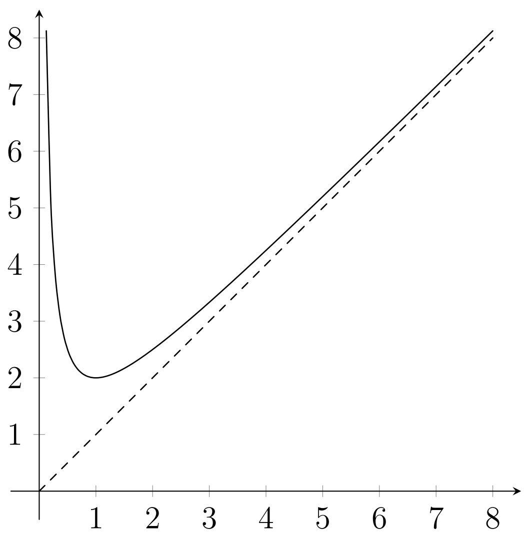
$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(e^{2x}\sin(\cos x)\right) &= 2e^{2x}\sin(\cos x) + e^{2x}\cos(\cos x)(-\sin x) \\ &= e^{2x}\left(2\sin(\cos x) - \cos(\cos x)\sin x\right).\end{aligned}$$

3. Se kursboken för formuleringen av medelvärdessatsen. Figuren till vänster på nästa sida visar att det finns ett tal ξ i intervallet $]0, 1[$ sådant att tangentlinjens riktningskoefficient då $x = \xi$ är densamma som riktningskoefficienten för linjen mellan $(0, f(0)) = (0, 0)$ och $(1, f(1)) = (1, 1)$.
Funktionen $f(x) = x^3$ är kontinuerlig på $[0, 1]$ och deriverbar på $]0, 1[$, så satsen är tillämpbar. Enligt satsen ska det finnas ett tal $\xi \in [0, 1]$ sådant att

$$f'(\xi) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = 1.$$

Eftersom $f'(x) = 3x^2$ måste ξ vara en lösning i intervallet $]0, 1[$ till ekvationen $3x^2 = 1$, d.v.s. $\xi = 1/\sqrt{3}$. Detta visar att satsen stämmer för det givna exemplet.





4. För att skissa grafen bestämmer vi först de stationära punkterna. Vi får ekvationen

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = 0,$$

vilken är uppfylld för x i definitionsmängden precis då $x = 1$. Funktionsvärdet i denna punkt är $f(1) = 2$.
För att hitta eventuella asymptoter studerar vi först gränsvärdet då $x \to 0+$.

$$\lim_{x\to 0+} \left(x + \frac{1}{x} \right) = +\infty.$$

Detta visar att y=axeln är en lodrät asymptot. Eftersom $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, saknar grafen vågräta asymptoter, men vi har $\lim_{x\to\infty}(f(x) - x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$, och därför är linjen $y = x$ en sned asymptot då $x \to \infty$. Nu har vi tillräckligt med information för att skissa grafen (se den högra figuren ovan). Vi ser att $V_f = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 2\}$.

5. Eftersom asymptoterna skär varandra i $(0, 0)$, så är hyperbeln centrerad i origo och hyperbelns ekvation kan skrivas på formen

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1,$$

där ett av tecknen i högerledet gäller, och bestäms av vilken av axlarna som skärs av hyperbeln. Eftersom hyperbeln ska skära y-axeln men inte x-axeln, ska högerledet vara -1 (vilket vi ser om vi sätter in $x = 0$ i ekvationen). Skärningspunkterna med y-axeln ger att $b = 1/2$. Vi kan nu skissa hyperbeln (se figuren till vänster på nästa sida).
Asymptoternas ekvation får vi fram om vi byter ut -1 i högerledet i hyperbelns ekvation mot 0. Detta ger med $b = 1/2$ och med hjälp av konjugatregeln:

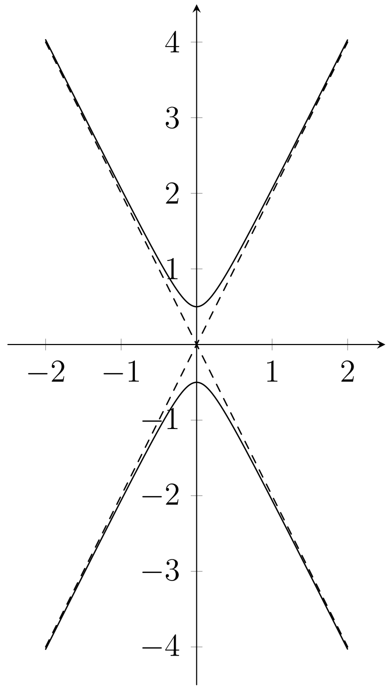
$$(\frac{x}{a} - 2y)(\frac{x}{a} + 2y) = 0,$$

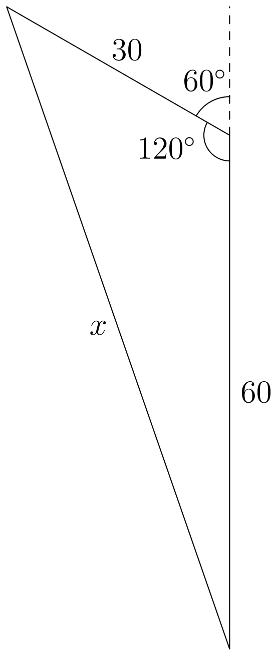
vilket är ekvivalent med

$$y = \frac{x}{2a} \quad \text{eller} \quad y = -\frac{x}{2a}.$$

Jämförelse med de givna ekvationerna för asymptoterna ger att $a = 1/4$. Hyperbelns ekvation är

$$16x^2 - 4y^2 = -1.$$





6. Svar: Avståndet är $30\sqrt{7}$ nautiska mil och det ökar med farten $\dfrac{60}{\sqrt{7}}$ nautiska mil i timmen.

Lösning: Vi ritar en figur (se ovan till höger), och ser att vi kan använda cosinussatsen för att hitta avståndet:

$$x^2 = 30^2 + 60^2 - 2 \cdot 30 \cdot 60 \cos(120°) = 30^2 \cdot 7.$$

Avståndet är därför $x = 30\sqrt{7}$ nautiska mil.

För att beräkna hur snabbt avståndet ökar kan vi låta t vara tiden som gått från kl. 16.00. Vi ska fortfarande använda cosinussatsen, men sidorna med längd 30 och x i figuren har nu ändrats till $30(1+t)$ respektive $x(t)$. Vi får

$$x(t)^2 = 30^2 \left((1+t)^2 + 4 + 2(1+t)\right) = 30^2 \left(7 + 4t + t^2\right)$$

för alla t nära 0. Den sökta farten ges av $x'(0)$. Vi kan välja mellan att derivera implicit eller att först lösa ut $x(t)$ och sedan derivera på vanligt sätt. Deriverar vi implicit får vi

$$2x(t)x'(t) = 30^2 \left(4 + 2t\right).$$

Evaluering i $t = 0$ ger

$$x'(0) = \frac{60}{\sqrt{7}} \text{ nautiska mil i timmen.}$$

7. Svar: $\frac{13}{5}$.

Lösning: För att bestämma riktningskoefficienterna till tangent- och normallinjerna behöver vi bestämma $f'(-1)$. Detta gör vi med implicit derivering. Skriv $y = y(x)$ och derivera ekvationsuttrycket med avseende på x. Detta ger

$$3x^2 + 3y(x)^2 y'(x) + 2y(x)y'(x) - 4 = 0.$$

Löser vi ut $y'(x)$ från detta får vi

$$y'(x) = \frac{4 - 3x^2}{3y(x)^2 + 2y(x)}.$$

Vi sätter nu in $x = -1$ och $y(-1) = 1$, och får då

$$y'(-1) = \frac{1}{5}.$$

Från detta och enpunktsformen för räta linjens ekvation har vi att tangentlinjen och normallinjerna har ekvationerna

$$y - 1 = \frac{1}{5}(x + 1)$$

respektive

$$y - 1 = -5(x + 1).$$

Vi behöver nu bestämma koordinaterna för tangent- och normallinjens skärningspunkter med x-axeln. Sätter vi in $y = 0$ i ekvationerna för tangent- och normallinjerna ovan, får vi

$$-1 = \frac{1}{5}(x + 1) \qquad \text{respektive} \qquad -1 = -5(x + 1),$$

vilka har lösningarna

$$x = -6 \qquad \text{respektive} \qquad x = -\frac{4}{5}.$$

Den triangel som bildas av de givna linjerna har basen $-\frac{4}{5} - (-6) = \frac{26}{5}$ och höjden 1. Triangelns area är därför $\frac{1}{2} \cdot \frac{26}{5} = \frac{13}{5}$.

8. Vi behöver visa att $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$ oavsett värde på a. Vi bestämmer höger- och vänstergränsvärde separat:

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} a^2 e^{ax} = a^2,$$
$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} (x + a)^2 = a^2.$$

Eftersom vi även har $f(0) = a^2$ så är f kontinuerlig i 0 för varje värde på a.

För att f ska vara deriverbar i a måste höger- och vänsterderivatan sammanfalla då $x = 0$. Vi har

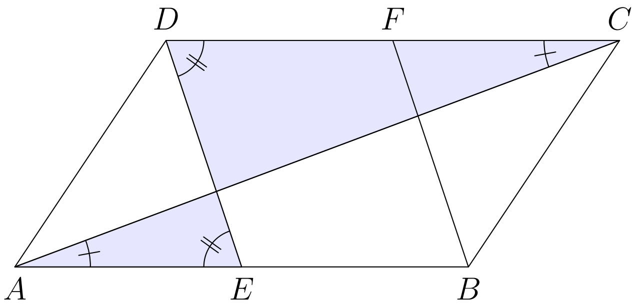
$$\lim_{h\to 0+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{a^2 e^{ah} - a^2}{h} = a^3 \lim_{h\to 0+} \frac{e^{ah} - 1}{ah} = a^3$$

och

$$\lim_{h\to 0-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{(h+a)^2 - a^2}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{h^2 + 2ah}{h} = \lim_{h\to 0-} (h + 2a) = 2a.$$

Höger- och vänsterderivatan är lika om och endast om $a^3 = 2a$, d.v.s. om och endast om $a = 0$ eller $a = \pm\sqrt{2}$.

9. Parallellaxiomet ger (eftersom sträckorna AB och DC är parallella) att $\angle BAC = \angle DCA$ och $\angle AED = \angle CDE$ (alternatvinklar). dessa vinklar är markerade i figuren nedan. Då blir de blåmarkerade trianglarna i figuren likformiga enligt likformighetsfall VV. Enligt parallellogramsatsen är motstående sidor i parallellogrammen $ABCD$ lika långa, och speciellt är $AB = CD$. Eftersom AE är hälften så lång som AB, så måste även AE vara hälften så lång som CD. På grund av likformigheten delar sträckan DE sträckan AC i förhållandet $1 : 2$.

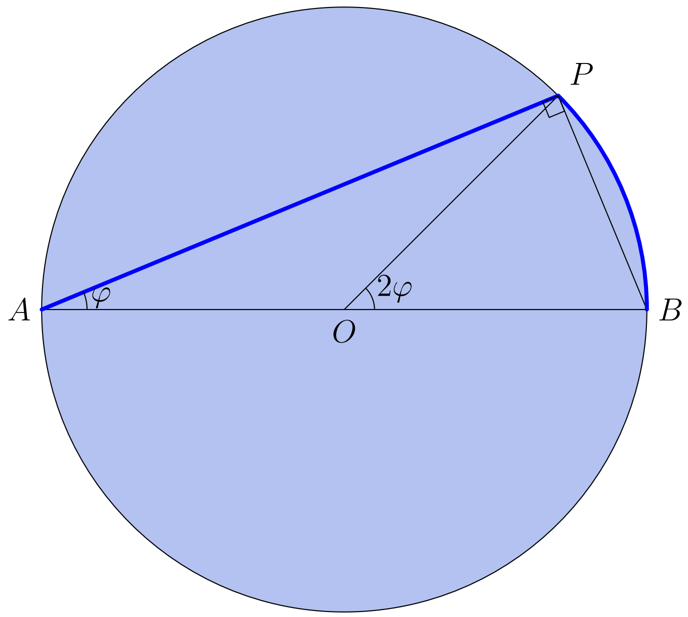


Samma resonemang som ovan (med sträckan AE utbytt mot sträckan BF) ger att sträckan BF delar sträckan AC i förhållandet $2 : 1$.
Sammantaget ger detta att DE och BF delar sträckan AC i tre lika stora delar, vilket var det vi skulle bevisa.

10. Svar: Den bästa strategin är att den tävlande springer hela sträckan.
Lösning: Låt punkten dit den tävlande simma till kallas för P, och låt vinkeln mellan AB och AP betecknas φ, se figur på nästa sida. Vi väljer längdenhet så att cirkelns (sjöns) radie är 1. Vinkeln APB är rät enligt randvinkelsatsen. Definitionen av cos ger att längden av AP är $|AB| \cos\varphi = 2\cos\varphi$. Låt O vara cirkelns centrum. Längden av cirkelbågen PB är 2φ. Tiden det sammanlagt tar att simma och springa blir därmed proportionell mot

$$T(\varphi) = 2\cos\varphi + \frac{2\varphi}{2} = 2\cos\varphi + \varphi.$$

(Proportionalitetskonstanten är $1/v$, där v är simhastigheten.)



Vinkeln φ varierar mellan 0 och $\pi/2$, och vi noterar att om $\varphi = 0$, så simmar den tävlande hela sträckan, medan om $\varphi = \pi/2$, så motsvarar det att den tävlande springer hela sträckan. Vi vill hitta den vinkel som ger minsta värdet för funktionen $T(\varphi)$, för φ i det kompakta intervallet $[0, \pi/2]$. Detta minsta värde antas i en inre stationär punkt eller en randpunkt.

$$T'(\varphi) = -2\sin(\varphi) + 1,$$

vilken är 0 om och endast om $\sin\varphi = 1/2$, d.v.s. då $\varphi = \pi/6$ (eftersom φ måste tillhöra intervallet $[0, \pi/2]$).
Vi har $T(\pi/6) = \sqrt{3} + \frac{\pi}{6} > 1{,}5 + 0{,}5 = 2$, $T(0) = 2$ och $T(\pi/2) = \frac{\pi}{2} < 2$. Den inre stationära punkten ger alltså största värdet på intervallet $[0, \pi/2]$, medan det minsta värdet fås om $\varphi = \pi/2$, d.v.s. om den tävlande springer hela sträckan.