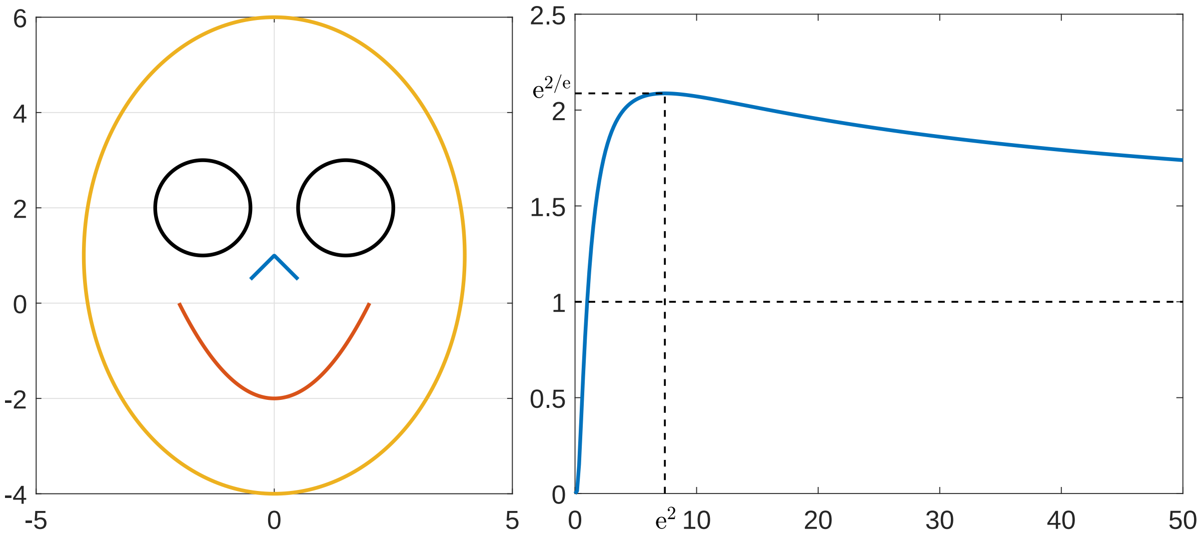
LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

Svar och anvisningar till
Tentamen i Endimensionell analys
delkurs B1
2019-08-19

1. **a)** $-1/\sqrt{2}$
b) $y = x/4 + 9/4$
c) Lösning saknas
d) $x = 2$ eller $x = 4$
e) $-2 < x \leq -1$
f) $(x+1)(x+3)$

2. Se geometriboken.

3. Kurvorna är ritade i figuren nedan till vänster. Vi har en ellips $(x/4)^2 + ((y-1)/5)^2 = 1$ (huvudet), en parabel (munnen), två cirklar (ögonen) samt grafen där absolutbeloppet ingår (näsan).



4. Det gäller att $C \Leftrightarrow 0 < x < 1 \Rightarrow B \Leftrightarrow 0 \leq x < 1 \Rightarrow A \Leftrightarrow |x| < 1$.

5. **a)** $\pi/6$ **b)** $-\mathrm{e}/\sqrt{5}$ **c)** $3/5$

6. Funktionen deriveras och faktoriseras: $f'(x) = \mathrm{e}^{\frac{\ln x}{\sqrt{x}}} \frac{1}{x\sqrt{x}} \left(1 - \frac{\ln x}{2}\right)$. Vi har $f(x) \to 0$ då $x \to 0^+$, $f(x) \to 1$ då $x \to \infty$. Grafen visas i figuren ovan till höger och värdemängden är $V_f =]0, \mathrm{e}^{2/\mathrm{e}}]$.

7. Drag radier, med längden r, i cirkeln till tangeringspunkterna samt till de två spetsiga hörnen. Inuti triangeln bildas då en kvadrat med sidan r samt fyra mindre trianglar. Med hjälp av Pythagoras sats på två närliggande trianglar (med gemensam hypotenusa) får man att kateterna i den stora triangeln är $r + a$ respektive $r + b$. Pythagoras sats på den ursprungliga triangeln ger sambandet $r^2 + r(a+b) = ab$. Triangelns area A är summan av kvadratens och de fyra mindre trianglarna:

$$A = r^2 + 2\frac{1}{2}ra + 2\frac{1}{2}rb = r^2 + r(a+b) = ab.$$

8. Bevis av formeln: ${}^a\log b\, {}^b\log a = {}^b\log a^{{}^a\log b} = {}^b\log b = 1$. Ekvationen är då ekvivalent med $(x > 0)$

$$\frac{{}^2\log 7}{{}^2\log x} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad {}^2\log x^2 = {}^2\log 7 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 7 \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt{7}.$$

9. Låt $\alpha \in (-\pi/2, 0)$ vara den vinkel som uppfyller $\sin\alpha = -1/5$ samt $\beta \in (\pi/2, \pi)$ vara den vinkel som uppfyller $\cos\beta = -1/5$. Då är $\cos\alpha > 0$, $\sin\beta > 0$ och

$$\cos(\arcsin(-1/5)) = \cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \frac{2\sqrt{6}}{5},$$
$$\tan(\arccos(-1/5)) = \tan\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\sqrt{1-\cos^2\beta}}{\cos\beta} = -2\sqrt{6}.$$

10. Funktionen $\mu(S)$ uppfyller $\mu(0) = 0$ och $\mu(S) \to \beta$ då $S \to \infty$. Vidare är

$$\mu'(S) = \frac{4}{(S+2)^3}\big((\beta-1)S + 2\big),$$

vilket ger följande alternativ:

$\underline{\beta \geq 1}$: Funktionen är växande och största värde saknas.

$\underline{0 \leq \beta < 1}$: Derivatan har det enda nollstället $S_{\max} = 2/(1-\beta)$, vilket är en maximipunkt. Tillväxthastigheten (funktionsvärdet) är $\mu(S_{\max}) = 1/(2-\beta)$.