FÖRKORTADE LÖSNINGAR FÖR TENTAMEN I ENDIMENSIONELL ANALYS, 20190429

1. a. $1/\sqrt{3}$.
b. $x = \pm 2\pi/3 + 2\pi n$, n heltal.
c. $x = -3, 1$.
d. $\ln 3$.
e. 1 cm.
f. $x = 1, 3/2$.
2. a. 1/2. b. 1. c. 0.
3. Derivatan

$$f'(x) = \frac{-6x^2}{(x^3-1)^2}$$

Så f har en stationär punkt i $x = 0$. Teckenstudium visar att detta är en terass. Asyptoter: Vertikal i $x = 1$, horisontell i $y = 1$.
4. Se boken.
5. Vi har $f'(x) = 1 - \frac{1}{x+1}$ som är positiv då $x > 0$ och negativ då $-1 < x < 0$, samt $f'(0) = 0$. Detta visar (mha teckentabell) att $f(x) \geq 0$ eftersom $f(0) = 0$.
6. Låt V vara volymen av cylindern, där r är cylinderns radie och h dess höjd. Låt vidare R vara klotets radie. Om cylinderns kant skär klotets yta så får vi m.h.a. Phytagoras sats

$$R^2 = r^2 + (h/2)^2.$$

Ur detta fås att r är en funktion av h (med R fix) och

$$V(h) = \pi r^2 h = \pi h(R^2 - \frac{h^2}{4}).$$

Derivatan $V'(h)$ har nollställe i $h = 2R/\sqrt{3}$ som är ett maximum (gör teckenstudium). Därmed fås den maximala volymen $V_{max} = \frac{4R^3\pi}{3\sqrt{3}}$. Då klotets volym är $4R^3\pi/3$ är förhållandet mellan cylinderns och klotets volymer lika med $1/\sqrt{3}$.
7. Endast Bo har rätt.
8. a. $\binom{20}{19} = 20$.
b. $\binom{20}{10}$ eller $\sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k}^2$. Det första svaret får man om man multiplicerar ihop parenteserna först.
9.

Låt (x, y) vara cirkelns centrum. Vi har $r = y$ eftersom den tangerar x-axeln. Punkten där cirkeln tangerar linjen $y = x$ ges av $(x - r/\sqrt{2}, r + r/\sqrt{2})$. Men x och y-koordinaterna är lika på denna linje och alltså är

$$x - r/\sqrt{2} = r + r/\sqrt{2},$$

varur vi får att $x = (1 + \sqrt{2})r$.

Avståndet från punkten $(6,2)$ till cirkelns centrum måste vara lika med r. Alltså,

$$(6-x)^2+(2-y)^2=r^2,$$

vilket ger

$$(6-(1+\sqrt{2})r)^2+(2-r)^2=r^2.$$

Ur detta fås att $r = 2\sqrt{2} \pm \sqrt{5\sqrt{2}-7}$. (Två cirklar). Cirkelns centrum ligger i $((1+\sqrt{2})r, r)$, med något av dessa värden på r.

10. a. Vi har $f(x) = \tan x = 0$ precis då $x = n\pi$, n heltal. Då följer direkt att $f'(x) = 1/\cos^2 x$ är lika med 1 i dessa punkter.

b. Om $f(x) = g(x)/h(x)$ och om vi antar att x är ett nollstället, så är $g(x) = 0$ och följaktligen

$$f'(x) = \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{h(x)^2} = \frac{g'(x)}{h(x)}.$$

Så om $f'(x) = \pm 1$ i dessa punkter måste $g'(x) = \pm h(x)$.