LÖSNINGAR | **ENDIMENSIONELL ANALYS**
LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA | **DELKURS B1**
MATEMATIK | **2018–11–02, 08:00–13:00**

Inga hjälpmedel är tillåtna. För att du skall kunna erhålla full poäng skall dina lösningar vara läsbara och försedda med ordentliga motiveringar. Lämna tydliga svar. Varje uppgift kan som mest ge 3 poäng. Eventuell bonuspoäng erhålls antingen *på godkäntdelen eller överkursdelen.*

Godkäntdel

För att bli godkänd krävs dels högst en uppgift med 0 poäng av dessa sex uppgifter, dels minst 9 poäng (här kan eventuell bonuspoäng räknas in) av 18 möjliga.

1. *Till denna uppgift krävs endast svar. Eventuella lösningar kommer ej att bedömas. 0–3 rätt ger 0 poäng, 4 rätt ger 1 poäng, 5 rätt ger 2 poäng och 6 rätt ger 3 poäng.*

   a) Lös ekvationen $\ln(x+3) + \ln(x+4) = \ln 42$.
   b) Skriv uttrycket $\sqrt{3} + \sqrt{12}$ på formen $a\sqrt{3}$ där a är ett heltal.
   c) Låt ℓ vara linjen som går genom punkten $(-1, 2)$ och som har riktningskoefficient 2. Ange en ekvation för ℓ på formen $y = kx + m$.
   d) Lös ekvationen $\sqrt{2-4x} = \sqrt{3-2x}$.
   e) Bestäm $\sin(210°)$ exakt.
   f) Lös ekvationen $\dfrac{1}{x^3 - 4x} = \dfrac{1}{12x}$.

   Svar

   a) $x = 3$ b) $3\sqrt{3}$ c) $y = 2x + 4$
   d) $x = -1/2$ e) $-1/2$ f) $x = \pm 4$

2. Bestäm a) $\dfrac{d^2}{dx^2}\cos(x^2)$, b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2^x + \ln x}{x^2 + 3^x}$, c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(2x)}{\sin(3x^2)}$.

   Lösning

   a) Vi deriverar en gång, och finner med hjälp av kedjeregeln att

$$\frac{d}{dx}\cos(x^2) = -\sin(x^2)\frac{d}{dx}x^2 = -2x\sin(x^2).$$

   En derivering till, här med hjälp av produktregeln och kedjeregeln, ger

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dx^2}\cos(x^2) &= \frac{d}{dx}\left(-2x\sin(x^2)\right) = \left(\frac{d}{dx}(-2x)\right)\cdot\sin(x^2) - 2x\cdot\frac{d}{dx}\sin(x^2)\\ &= -2\sin(x^2) - 2x\cos(x^2)\cdot\frac{d}{dx}(x^2)\\ &= -2\sin(x^2) - 4x^2\cos(x^2).\end{aligned}$$

   b) Vi bryter ut de dominerande termerna 2^x respektive 3^x och finner att

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x + \ln x}{x^2 + 3^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2^x}{3^x}\cdot\frac{1 + (\ln x)/2^x}{x^2/3^x + 1} = 0\cdot\frac{1+0}{0+1} = 0.$$

Här har vi använt räkneregler för gränsvärden tillsammans med standardgränsvärdena

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2^x}{3^x} = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{2^x} = 0 \quad \text{och} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{3^x} = 0.$$

c) Både täljare och nämnare är 0 då vi sätter in $x = 0$. Vi förlänger med konjugatet $1 + \cos(2x)$ till $1 - \cos(2x)$, och masserar uttrycket för att använda standardgränsvärden,

$$\begin{aligned}
\frac{1-\cos(2x)}{\sin(3x^2)} &= \frac{(1-\cos(2x))(1+\cos(2x))}{\sin(3x^2)(1+\cos(2x))} = \frac{1-\cos^2(2x)}{\sin(3x^2)(1+\cos(2x))} \\
&= \frac{\sin^2(2x)}{\sin(3x^2)(1+\cos(2x))} = \frac{4}{3}\cdot\frac{\sin(2x)}{2x}\cdot\frac{\sin(2x)}{2x}\cdot\frac{3x^2}{\sin(3x^2)}\cdot\frac{1}{1+\cos(2x)} \\
&\to \frac{4}{3}\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot\frac{1}{1+1} = \frac{2}{3}, \quad \text{då } x\to 0.
\end{aligned}$$

I det sista steget har vi bland annat använt det faktum att $(\sin t)/t \to 1$ då $t \to 0$ i olika konstellationer, samt det faktum att $\cos(2x) \to 1$ då $x \to 0$ och diverse räkneregler för gränsvärden.

Vi kan även lösa denna deluppgift med hjälp av upprepad användning av l'Hôpitals regel. Vi observerar att både täljare och nämnare blir 0 då vi sätter in $x = 0$ (och nämnaren $g(x)$ är nollskild i en punkterad omgivning av $x = 0$). Vi kallar täljaren för $f(x)$ och nämnaren för $g(x)$. En derivering ger

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2\sin(2x)}{6x\cos(3x^2)}.$$

Även här blir täljare och nämnare 0 då vi sätter in $x = 0$ (dessutom blir nämnaren $g'(x)$ nollskild i en punkterad omgivning av $x = 0$). Vi deriverar en gång till, och finner att

$$\frac{f''(x)}{g''(x)} = \frac{4\cos(2x)}{6\cos(3x^2) - 36x^2\sin(3x^2)}.$$

Nu blir nämnaren nollskild då vi sätter in $x = 0$. L'Hôpitals regel kan tillämpas två gånger, och

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{g''(x)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

3. Definiera vad som menas med absolutbeloppet av det reella talet x. Rita grafen till funktionen $f(x) = |2x + 1| + 2|x - 1|$ då $x \in [-3, 3]$. Har ekvationen $f(x) = 5$ någon lösning i detta intervall?

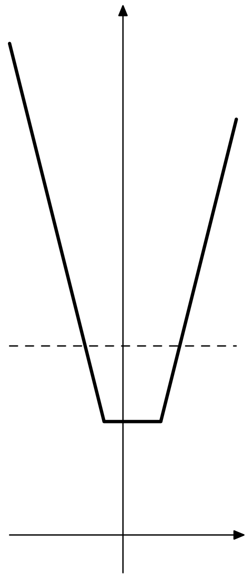
Lösning Absolutbeloppet $|x|$ av det reella talet x definieras som x om $x \geq 0$ och som $-x$ om $x < 0$. (En geometrisk definition är OK, då definieras $|x|$ som avståndet från x till 0 på tallinjen.)

Uttrycken innanför absolutbeloppen är noll precis då $x = -1/2$ och $x = 1$. Vi använder definitionen av absolutbelopp, delar upp i lämpliga fall och förenklar,

$$f(x) = \begin{cases} -(2x+1) + 2(-(x-1)), & -3 \leq x < -1/2, \\ 2x+1+2(-(x-1)), & -1/2 \leq x < 1, \\ 2x+1+2(x-1), & 1 \leq x \leq 3, \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -4x+1, & -3 \leq x < -1/2, \\ 3, & -1/2 \leq x < 1, \\ 4x-1, & 1 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

Vi kan nu rita grafen till f, se figur nedan. Den streckade linjen i figuren är linjen $y = 5$, och vi *ser* att ekvationen $f(x) = 5$ i själva verket har två lösningar. (Om man vill vara mer formell kan man använda satsen om mellanliggande värden. Funktionen f är kontinuerlig och $f(-3) = 13 > 5$ och $f(0) = 3 < 5$. Alltså finns något x mellan -3 och 0 sådant att $f(x) = 5$. Det är förstås även OK att lösa ekvationen $f(x) = 5$.)



4. Ange för vilka x som serien $\sum_{k=2}^{+\infty} x^k$ konvergerar och lös olikheten

$$\sum_{k=2}^{+\infty} x^k \geq \frac{1}{2}.$$

Lösning Den geometriska serien i vänsterledet har kvot x och är således konvergent precis då $|x| < 1$. För dessa x blir (första termen är ju x^2 och kvoten är x)

$$\sum_{k=2}^{+\infty} x^k = \frac{x^2}{1-x}.$$

De olikheter som måste vara uppfyllda är alltså

$$\frac{x^2}{1-x} \geq \frac{1}{2} \quad \text{och} \quad -1 < x < 1.$$

Om $x < 1$ så är $1 - x > 0$ och vi kan multiplicera med $2(1 - x)$ och bibehålla ordningen på olikheten och lösningsmängden, varför våra olikheter är ekvivalenta med

$$2x^2 \geq 1 - x \quad \text{och} \quad -1 < x < 1,$$

eller, efter subtraktion av $1 - x$ i den första olikheten, med olikheterna

$$2x^2 + x - 1 \geq 0 \quad \text{och} \quad -1 < x < 1,$$

Nu gäller det att $x = -1$ och $x = 1/2$ gör att andragradsuttrycket i vänsterledet blir 0. Eftersom vi har positiv koefficient framför x^2 så blir $2x^2 + x - 1 \geq 0$ precis då $x \leq -1$ eller $x \geq 1/2$. Den första familjen måste kastas eftersom x skall vara större än -1. Kvar blir alla x sådana att dels $x \geq 1/2$ men också $-1 < x < 1$. Det gäller alltså att alla x sådana att $1/2 \leq x < 1$ löser den ursprungliga olikheten.

5. Linjen ℓ_1 skär en given cirkel i punkterna A och B så att bågen AB utgör en tiondel av cirkelns totala omkrets. Linjen ℓ_2 tangerar samma cirkel i punkten A. Under vilken vinkel skär linjerna ℓ_1 och ℓ_2 varandra?

   Lösning Låt O vara cirkelns medelpunkt. Eftersom kordan AB skär ut en tiondel av cirkeln blir vinkeln AOB en tiondel av $360°$, dvs $36°$. Vidare, då ℓ_2 tangerar cirkeln i A kommer vinkeln mellan ℓ_2 och radien OA att bli $90°$. För den sökta vinkeln α mellan ℓ_1 och ℓ_2 gäller därför att

$$\alpha = 90° - \angle OAB.$$

   Men triangeln OAB är likbent, så satsen om likbenta trianglar tillsammans med satsen som säger att vinkelsumman i en triangel är $180°$ ger att

$$\angle OAB = \frac{1}{2}(180° - 36°) = 72°.$$

   Alltså blir $\alpha = 90° - 72° = 18°$.

6. Kostnaden för att köra ett visst stort fullastat fraktskepp en timme med farten v knop har empiriskt bestämts till $10v^3 + 20\,000$ SEK (1 knop är lika med 1 sjömil per timme). Här står termen $10v^3$ för bränslekostnader och $20\,000$ för övriga kostnader. Skeppet, som maximalt kan färdas i 25 knop, skall en dag köra fullastad från Trelleborg till Travemünde, en resa på 611 sjömil. Med vilken konstant fart skall överresan ske för att den totala kostnaden skall minimeras?

   Lösning Det spelar ingen roll hur långt skeppet skall köra. Om skeppet färdas med hastighet $v > 0$ kommer den totala kostnaden att bli proportionell mot $f(v)$, där

$$f(v) = \frac{10v^3 + 20\,000}{v}, \quad 0 < v \leq 25$$

   Vår uppgift är därmed att bestämma det v som minimerar f. Vi deriverar och finner att

$$f'(v) = 20v - \frac{20\,000}{v^2} = \frac{20v^3 - 20\,000}{v^2}.$$

   Alltså gäller det att

$$f'(v) = 0 \iff 20v^3 - 20\,000 = 0 \iff v^3 = 1000 \iff v = 10.$$

   Teckenstudie av f' ger att $f'(v) < 0$ då $0 < v < 10$ och $f'(v) > 0$ då $10 < v < 25$. Alltså blir kostnaden minimal då farten är $v = 10$ knop.

Överbetygsdel

Om du klarat godkäntdelen har du chans på överbetyg. För att få betyg 4 krävs minst 4 poäng på denna del. För betyg 5 krävs minst 7 poäng.

7. För vilka reella tal x gäller det att $11\sin x + \cos 2x \geq 6$?

   Lösning Vi skriver om $\cos 2x$ som $1 - 2\sin^2 x$ och erhåller således den ekvivalenta olikheten $11\sin x + 1 - 2\sin^2 x \geq 6$. Med variabelbytet $t = \sin x$ övergår olikheten i $2t^2 - 11t + 5 \leq 0$. Kvadratkomplettering och faktorisering av andragradspolynomet i vänstra membrum ger $2(t-1/2)(t-5) \le 0$. Eftersom $t = \sin x$ kommer det gälla att $-1 \le t \le 1$ varför faktorn $t-5$ är negativ. För att högerledet skall bli icke-positivt krävs därför att $t - 1/2 \ge 0$, dvs att $t \ge 1/2$. Men det betyder ju precis att $\sin x \ge 1/2$. Genom att betrakta enhetscirkeln finner vi att detta är uppfyllt om $\pi/6 \le x \le 5\pi/6$. Tack vare att sin är 2π-periodisk blir olikheten uppfylld på alla intervall $[\pi/6 + 2\pi k, 5\pi/6 + 2\pi k]$, där k är ett heltal.

8. Bestäm talen a och b så att funktionen f, definierad som

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - x^2 + ax + b}{x+3}, & x \neq -3, \\ 20, & x = -3, \end{cases}$$

blir kontinuerlig på hela $\mathbb{R}$. Blir f deriverbar i $x = -3$ för dessa värden på a och b?

Lösning Oavsett värdena på a och b är f kontinuerlig i alla punkter förutom möjligtvis $x = -3$. För att f skall vara kontinuerlig i $x = -3$ måste gränsvärdet då $x \to -3$ av det rationella uttrycket existera och vara lika med 20.
För att gränsvärdet skall kunna existera måste det gälla att polynomet i täljaren har ett nollställe då $x = -3$, så att faktorn $x + 3$ kan förkortas bort. Insättning av $x = -3$ ger att täljaren blir $-27 - 9 - 3a + b$. Det måste alltså gälla att $b = 3a + 36$. Polynomdivision ger nu att

$$\frac{x^3 - x^2 + ax + 3a + 36}{x+3} = \cdots = x^2 - 4x + a + 12.$$

Talet a skall väljas så att gränsvärdet blir 20 då $x \to -3$. En direkt räkning ger

$$\lim_{x \to -3} \left(x^2 - 4x + a + 12\right) = (-3)^2 - 4(-3) + a + 12 = a + 33.$$

Alltså blir gränsvärdet 20 precis då $a = -13$. Det ger i sin tur att $b = 3a + 36 = -3$. För dessa värden kan vi skriva $f(x) = x^2 - 4x - 1$ för *alla* $x \in \mathbb{R}$. Andragradspolynom är deriverbara så f blir speciellt deriverbar i $x = -3$.

9. I ΔABC gäller det att vinkeln vid A är dubbelt så stor som vinkeln vid C, sidan BC är 2 cm längre än sidan AB, och att $AC = 5$ cm. Bestäm sidorna AB och BC.

Lösning (med geometri) Drag en bisektris från A och låt den träffa D på sidan BC. Trianglarna ABD och CBA blir likformiga eftersom vinkel DAB är lika med vinkel C och vinkel B är gemensam. Likformigheten ger att

$$\frac{AB}{CB} = \frac{AD}{AC} = \frac{BD}{AB}.$$

Triangel ADC är likbent eftersom basvinklarna DAC och DCA är lika. Det ger $AD = CD$. Vidare observerar vi att $BC = AB + 2$ och $BD = BC - CD = AB + 2 - CD$. Infogar vi detta i ekvationerna för likformighet finner vi att

$$\frac{AB}{AB+2} = \frac{CD}{5} = \frac{AB + 2 - CD}{AB}.$$

Detta är två ekvationer, som kan skrivas

$$5AB = AB \cdot CD + 2CD, \quad \text{och} \quad CD \cdot AB = 5AB + 10 - 5CD.$$

Tar vi produkten $CD \cdot AB$ från en andra ekvationen och stoppar in i den första, får vi att

$$5AB = 5AB + 10 - 5CD + 2CD \iff CD = \frac{10}{3}.$$

Den andra ekvationen blir nu

$$\frac{10}{3}AB = 5AB + 10 - 5 \cdot \frac{10}{3} \iff \frac{5}{3}AB = \frac{20}{3} \iff AB = 4.$$

Alltså gäller det att $AB = 4$ cm och därmed att $BC = 6$ cm.

Lösning (med trigonometri) Vi skall använda sinussatsen. Om vi sätter $\alpha = \angle C$ så blir $\angle A = 2\alpha$ och $\angle B = 180° - 3\alpha$. Sinussatsen ger därmed (här nyttjar vi att $\sin(180° - 3\alpha) = \sin 3\alpha$)

$$\frac{AB}{\sin\alpha} = \frac{AB + 2}{\sin 2\alpha} = \frac{5}{\sin 3\alpha}. \tag{1}$$

Om vi använder första och andra uttrycken ovan och det faktum att $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ finner vi att

$$AB = \frac{(AB + 2)\sin\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{AB + 2}{2\cos\alpha} \iff \cos\alpha = \frac{AB + 2}{2AB}.$$

Vi nyttjar härnäst att

$$\begin{aligned}
\sin 3\alpha &= \sin(2\alpha + \alpha) = \sin(2\alpha)\cos\alpha + \cos(2\alpha)\sin\alpha \\
&= 2\sin\alpha\cos^2\alpha + (1 - 2\sin^2\alpha)\sin\alpha \\
&= 2\sin\alpha(1 - \sin^2\alpha) + \sin\alpha - 2\sin^3\alpha \\
&= 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha.
\end{aligned}$$

Alltså blir (här använder vi första och sista uttrycken i (1))

$$AB = \frac{5\sin\alpha}{\sin 3\alpha} = \frac{5\sin\alpha}{3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha} = \frac{5}{3 - 4\sin^2\alpha} = \frac{5}{4\cos^2\alpha - 1}.$$

Stoppar vi in det uttryck vi hade för $\cos\alpha$ finner vi att

$$AB = \frac{5}{4\left(\frac{AB+2}{2AB}\right)^2 - 1} = \frac{5AB^2}{AB^2 + 4AB + 4 - AB^2} = \frac{5AB^2}{4AB + 4}$$

vilket, eftersom $AB \neq 0$, är ekvivalent med $4AB + 4 = 5AB$, dvs $AB = 4$. Vi finner åter att $AB = 4$ cm och att $BC = 6$ cm.

Lösning (Med sinus- och cosinussatsen) Sinussatsen tillämpad på två sidor ger

$$\frac{AB}{\sin\alpha} = \frac{AB + 2}{\sin 2\alpha} = \frac{AB + 2}{2\sin\alpha\cos\alpha} \iff \cos\alpha = \frac{AB + 2}{2AB}.$$

Cosinussatsen ger sedan

$$\cos\alpha = \frac{(AB + 2)^2 + 5^2 - AB^2}{10(AB + 2)}$$

Dessa två uttryck för $\cos\alpha$ sätts lika varur det följer att $AB = 4$ eller $AB = 5$. Men lösningen med $AB = 5$ ger en likbent triangel med sidor 5, 5 respektive 7 cm, vilken måste förkastas eftersom vinkelsumman då skulle bli 4α, så $\alpha = 45°$, vilket inte stämmer.

10. I flera formelsamlingar förekommer olikheten

$$\ln(1+x) \geq \frac{x}{1+x}, \quad x \geq 0.$$

Olikheten ovan kan förbättras. Bestäm det minsta positiva tal a sådant att

$$\ln(1+x) \geq \frac{x}{1+ax}, \quad x \geq 0.$$

Lösning För ett fixt a bildar vi funktionen

$$f(x) = \ln(1+x) - \frac{1}{1+ax}, \quad x \geq 0.$$

Vårt mål är att bestämma det minsta positiva tal a som gör att $f(x) \geq 0$ för alla $x \geq 0$. Vi undersöker därför f, och börjar med att derivera,

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1 \cdot (1+ax) - x \cdot a}{(1+ax)^2} = \frac{(1+ax)^2 - (1+x)}{(1+x)(1+ax)^2} = \frac{x(2a-1+a^2x)}{(1+x)(1+ax)^2}.$$

Vi observerar att $f(0) = 0$ och att faktorerna x, $1+x$ och $(1+ax)^2$ är positiva om $x > 0$. Det är alltså faktorn $2a - 1 + a^2x$ som bestämmer tecknet på derivatan. Om $2a - 1 < 0$ så kommer $f'(x) < 0$ för små $x > 0$, och därför $f(x) < 0$ för små x. För $2a - 1 \geq 0$ kommer i stället $f'(x) > 0$ för $x > 0$ varför $f(x) > 0$ då $x > 0$. Den önskade olikheten gäller alltså för alla a sådana att $2a - 1 \geq 0$. Det minsta talet a som uppfyller $2a - 1 \geq 0$ är $a = 1/2$.