

1. a) Svar:  $-\frac{1}{\sqrt{3}}$   
 b) Svar:  $-\frac{1}{15}$   
 c) Svar: Lösning saknas  
 d) Svar:  $-4$   
 e) Svar:  $x < -1$  eller  $x > 5$   
 f) Svar:  $\frac{7}{3}$   
 g) Svar:  $x = -2$  eller  $x = 6$   
 h) Svar:  $20$   
 i) Svar:  $\frac{1}{3}$   
 j) Svar:  $-2x \sin(x^2 + 1)$
2. a) Svar:  $\sqrt{3} \sin x - \cos x = 2 \sin(x + \frac{11\pi}{6})$ . Svaret kan också skrivas  $2 \sin(x - \frac{\pi}{6})$ .  
 b) Argumenten hos den yttersta logaritmen måste vara 1, dvs  $\ln(e + \ln|x + 1|) = 1$ . Eftersom logaritmen är entydig har man att  $e + \ln|x + 1| = e$  och därefter  $\ln|x + 1| = 0$ . Svar:  $x = -2$  eller  $x = 0$ .  
 c) Polynomet  $p(z) = 1 - z + z^2 - z^3$  faktoriseras som  $p(z) = -(z - 1)(z^2 + 1)$ . Ekvationen  $p(z) = 0$  har  $z = 1$  som enda reella nollställe. Svar:  $x = \pm 1$ .
3. a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x^4 + (\ln x)^5}{3x^3 + 4x^4 + (\ln x)^6} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + x^{-1} + x^{-4}(\ln x)^5}{4 + 3x^{-1} + x^{-4}(\ln x)^6}$ . Svar:  $\frac{1}{4}$ .  
 b)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x) \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} x \ln x$ . Svar:  $0$ .  
 c)  $\left(\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^6 = \sum_{k=0}^6 \binom{6}{k} x^{\frac{6-k}{2}} 2^k x^{-\frac{k}{2}}$ . Vi söker  $3 - k = 2$  dvs  $k = 1$ . Svar:  $12$ .
4. Funktionen har en diskontinuitet vid  $x = 0$  eftersom  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \frac{\pi}{2}$  och  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\frac{\pi}{2}$ . Utanför origo är funktionen kontinuerligt, deriverbar och monotont växande eftersom  $f'(x) = \frac{2}{1+x^2} > 0$ . Den har alltså inga lokala extrempunkter. Nollställen:  $x = \pm 1$ . Två vågräta asymptoter eftersom  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$  och  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2}$ .
5. a) Teorifråga. Svar:  $B \Rightarrow A$ .

- b) Vi söker lokala extremvärden till den kontinuerliga och deriverbara funktionen  $K(t)$  i  $\{t \geq 0\}$ . Eftersom  $a > b > 0$  så är  $K(t) \geq 0$ . Dessutom är  $\lim_{t \rightarrow \infty} K(t) = 0$  och  $K(0) = 0$ , så de enda kandidatpunkterna inträffar då  $K'(t) = 0$ .

Vi har  $K'(t) = C(ae^{-at} - be^{-bt})$ . Enda nollställena inträffar då  $ae^{-at} = be^{-bt}$ .

**Svar:**  $t = \frac{\ln(a) - \ln(b)}{a - b}$ .

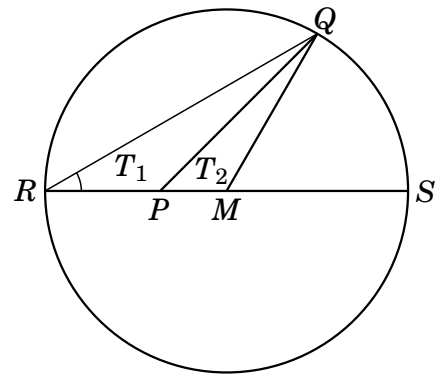
6. a) Triangeln  $RMQ$  är likbent. Därmed är vinkeln  $RQM$   $30^\circ$ , medan  $RQP$  och  $PQM$  är båda  $15^\circ$ .  $RPQ = 180^\circ - 30^\circ - 15^\circ = 135^\circ$  och  $QPM = 45^\circ$ . Därmed är  $PMQ = 120^\circ$ . Dessutom är vinkeln  $QMS$   $60^\circ$  (motsvarande randvinkeln är  $QRS$ ).

- b) Notera att  $QM = RM = 1$ . Arealen för  $T_1$  är  $A(T_1) = \frac{1}{2} RP h$  där  $h = QM \sin 60$  är triangelns höjd och  $RP = 1 - PM$ . Sinussatsen ger  $\frac{QM}{\sin 45} = \frac{PM}{\sin 15}$ . Därmed blir  $PM =$

$$\frac{\sin 15}{\sin 45}. \quad \text{Svar: } A(T_1) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sin 15}{\sin 45}\right) \sin 60 =$$

$$\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{(\sqrt{2} - \sqrt{2 - \sqrt{3}})}{4} = \frac{3}{8} (\sqrt{3} - 1) = \frac{1}{4} \frac{3}{1 + \sqrt{3}}.$$

Resultaten kan också uppnås med hjälp av andra satser och geometriska egenskaper.



LYCKA TILL!