LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

LÖSNINGAR
ENDIMENSIONELL ANALYS B1
2017–10–27 kl. 08–13

1.

a) $p(x) = x(x+4)(x-2)$	f) lösningen saknas
b) $\alpha = 120^o$	g) 4
c) $y = -2x+13$	h) $x = \frac{4}{7}$
d) $x = 3$ eller $x = 1$	i) $x = \frac{4}{3}$
e) $-1 < x < 5$	j) $\sin(1-x)$

2. **a)** $A^2 = 1^2 + (-\sqrt{3})^2 = 4$, dvs $A = 2$ och därmed $\cos\phi = \dfrac{1}{2}$, $\sin\phi = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, dvs $\phi = -\dfrac{\pi}{3}$. **Svar:** $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 2\sin(x - \dfrac{\pi}{3})$.

b) Använd substitutionen $2^x = z$. Man får $z^2 - z - 6 = 0$ med lösningar $z = 3$ eller $z = -2$. Insättning i den ursprungliga ekvationen ger att den sistnämnda är en falsk rot. **Svar:** $x = {}^2\log 3$.

c) Ekvationen motsvarar uttrycket $x^2 + x - 1 = 0$ för $x > 0$. Den enda positiva lösningen är $x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. För $x < 0$ blir ekvationen i stället $x^2 - x - 1 = 0$. Den enda negativa lösningen är $x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. **Svar:** $x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ och $x = -\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

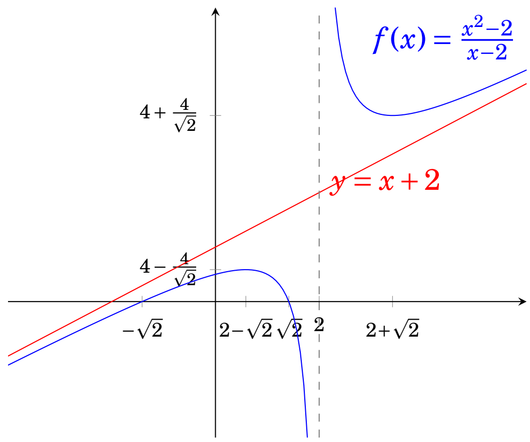
3. **a)** $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(\tfrac{3}{4}\right)^k = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{3}{4}\right)} = 4$. **Svar:** 4.

b) Använd t ex substitutionen $x = -t$ och förläng med konjugatet.
$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x\left(\sqrt{x^2+3} - \sqrt{x^2-3}\right) = \lim_{t\to+\infty} -t\frac{(t^2+3)-(t^2-3)}{\left(\sqrt{t^2+3}+\sqrt{t^2-3}\right)}$. Förkorta bort den ledande potensen t i nämnaren och täljaren. **Svar:** -3.

c) $\displaystyle f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} = \lim_{h\to 0} 3x^2 + 3xh + h^2 = 3x^2$.

4. $f(x)$ har nollställen vid $x = \pm\sqrt{2}$ och lodrät asymptot vid $x = 2$. $\displaystyle\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$ och $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$. $f'(x) = \dfrac{x^2-4x+2}{(x-2)^2}$ med nollställen vid $x = 2\pm\sqrt{2}$. Teckentabell nedan ger att lokalt minimivärde blir $f(2+\sqrt{2}) = 4 + \dfrac{4}{\sqrt{2}}$ och lokalt maximivärde blir $f(2-\sqrt{2}) = 4 - \dfrac{4}{\sqrt{2}}$. Mot oändligheten blir det $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$. Polynomdivision ger $f(x) = x + 2 + \dfrac{2}{x-2}$ och därmed blir $y = x+2$ sned asymptot (för både $x \to +\infty$ och $x \to -\infty$).

		$2-\sqrt{2}$		2		$2+\sqrt{2}$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$*$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	MAX	$\searrow$	$*$	$\searrow$	MIN	$\nearrow$

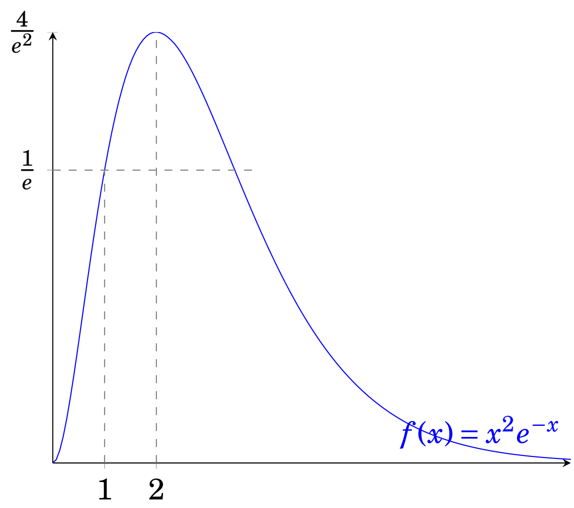


5. a) Teorifråga, se boken.

b) Teorifråga, se boken.

c) För varje värde på a fås nollställen till $x^2e^{-x} - a$ av skärningen mellan funktionsgrafen $f(x) = x^2e^{-x}$ och den vågräta linjen $y = a$. Vi söker vilka värden på a ger exakt *en* skärning i området $x \geq 1$. Detta ges av alla värden $0 < a < \dfrac{1}{e}$ samt av $a = \dfrac{4}{e^2}$.

Svar: $0 < a < \dfrac{1}{e}$ och $a = \dfrac{4}{e^2}$.



6. a) Figuren är symmetrisk relativt axeln AT. Triangeln är likbent och AP är en höjd. Dessutom är AM=MB = 1 och $BP = \sqrt{1^2-(1-2x)^2} = \sqrt{4x-4x^2}$. Därmed är arean $A(x) = \dfrac{1}{2}BC \cdot AP = BP \cdot AP = 2(1-x)\sqrt{4x-4x^2}$.

Svar: $A(x) = 2(1-x)\sqrt{4x-4x^2} = 4\sqrt{x}(1-x)^{3/2}$.

b) Optimeringsproblem på en kontinuerlig funktion i området $0 \leq x \leq \dfrac{1}{2}$, deriverbar i intervallets inre. Kandidatpunkter för extremvärden är intervallets randpunkter samt alla punkter inuti intervalet där derivatan $A'(x) = 0$. Derivatan beräknas till $A'(x) = 2\dfrac{(1-x)^{1/2}}{\sqrt{x}}(1-4x)$, som har nollstället $x = \frac{1}{4}$ inuti intervallet. Detta ger kandidatpunkterna $x = 0$, $x = \frac{1}{4}$ samt $x = \frac{1}{2}$. Insättning i $A(x)$ ger areorna 0, respektive $\dfrac{\sqrt{27}}{4}$ och 1. **Svar:** $x = \frac{1}{4}$.