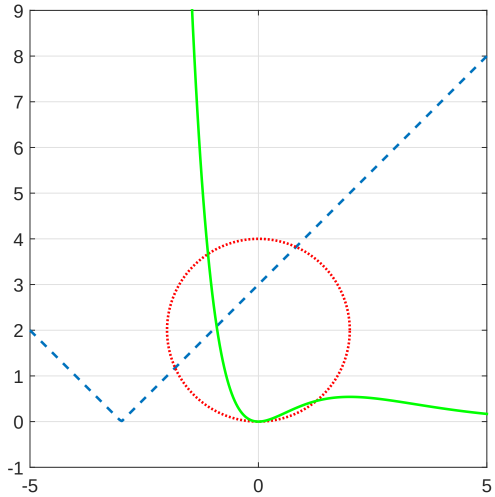
LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

Svar och anvisningar till
Tentamen i Endimensionell analys
delkurs B1
2016-12-22

1. **a)** $4/5$
b) $x = 3/2$
c) 5
d) $y = -3x + 8$
e) $1/\sqrt{2}$
f) $f^{-1}(x) = -\mathrm{e}^x$
g) Lösning saknas
h) $1 < x < 4$
i) $x = \pm 3$
j) $x = -2/3$



2. Kurvan $y = |x+3|$ är den blå och streckade i figuren ovan. Kurvan $x^2 + y^2 = 4y \Leftrightarrow x^2 + (y-2)^2 = 2^2$ är den röda prickade cirkeln med centrum i punkten $(0, 2)$ och radien 2. Kurvan $y = x^2\mathrm{e}^{-x}$ är grön och heldragen: Beräkna gränsvärdena

$$y = x^2\mathrm{e}^{-x} \to \begin{cases} \infty & \text{då } x \to -\infty, \\ 0 & \text{då } x \to \infty \text{ (standardgränsvärde)}, \end{cases}$$

derivatan $y'(x) = x(2-x)\mathrm{e}^{-x}$ och gör teckentabell. Punkten $(0, 0)$ är global minimipunkt och $= (2, 4\mathrm{e}^{-2})$ lokal maximipunkt.

3. **a)** $$\frac{3\mathrm{e}^x - 2^x + 5x^{100}}{4\mathrm{e}^x + \ln x} = \frac{3 - (\frac{2}{\mathrm{e}})^x + \frac{5x^{100}}{\mathrm{e}^x}}{4 + \frac{\ln x}{\mathrm{e}^x}} \to \frac{3 - 0 + 0}{4 + 0} = \frac{3}{4} \quad \text{då } x \to \infty$$

b) $$\lim_{x \to \pi/2} \frac{2x - \pi}{\cos x} = \left[y = x - \frac{\pi}{2} \right] = \lim_{y \to 0} \frac{2y}{\cos(y + \pi/2)} = \lim_{y \to 0} \frac{2y}{-\sin y} = -2$$

c) $$\lim_{h \to 0} \frac{f\left(\frac{\pi}{6} + h\right) - f\left(\frac{\pi}{6}\right)}{h} = f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2}{\cos^2(2\pi/6)} = \frac{2}{(1/2)^2} = 8$$

4. Uttryck varje påstående i ett intervall:

$A:\quad -1 \leq x \leq 0$

$B:\quad \sum_{k=0}^{\infty} x^k$ är konvergent $\quad\Leftrightarrow\quad -1 < x < 1$ (geometrisk serie)

$C:\quad \arcsin x \leq 0 \quad\Leftrightarrow\quad -1 \leq x \leq 0$ (enligt definition av arcsinus)

$D:\quad x \in V_f$ där $f(t) = \dfrac{2\arctan t - \pi}{2\pi} \quad\Leftrightarrow\quad -1 < x < 0$ (f är växande; beräkna $t \to \pm\infty$)

$E:\quad |3x + 2| \leq x + 2 \quad\Leftrightarrow\quad -1 \leq x \leq 0$

Intervallet i D är en sträng delmängd av intervallen i A, B, C och E. Om $x = 1/2$ så är påstående B sant och alla de andra falska.

Svar: $A \Leftrightarrow C \Leftrightarrow E \Leftarrow D \Rightarrow B$.

5. **a)** Se läroboken i geometri.

b) Drag AC och låt M vara cirkelns medelpunkt och r dess radie. Inför vinklarna $\alpha = \angle BAC$ och $\beta = \angle DCA$. Randvinkelsatsen ger att medelpunktsvinklarna $\angle BMC = 2\alpha$ samt $\angle DMA = 2\beta$. Vi har nu (vinklarna anges i grader)

$$AB \parallel CD \overset{\text{parallellaxiomet}}{\iff} \alpha = \beta \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2\alpha}{360^\circ} 2\pi r = \frac{2\beta}{360^\circ} 2\pi r$$
$$\Leftrightarrow \quad \text{båglängden } AD = \text{båglängden } BC.$$

6. **a)** $x1.05 - 10 > x \Leftrightarrow x > 200$. **Svar:** $x > 200$ kr.

b) Värdet efter n år blir

$$\begin{aligned} V &= x1.05^n - 10(1.05^{n-1} + 1.05^{n-2} + \cdots + 1.05^1 + 1) \\ &= x1.05^n - 10\frac{1.05^n - 1}{1.05 - 1} = (x - 200)1.05^n + 200. \end{aligned}$$

Svar: $A(x) = x - 200$ och $B = 200$.

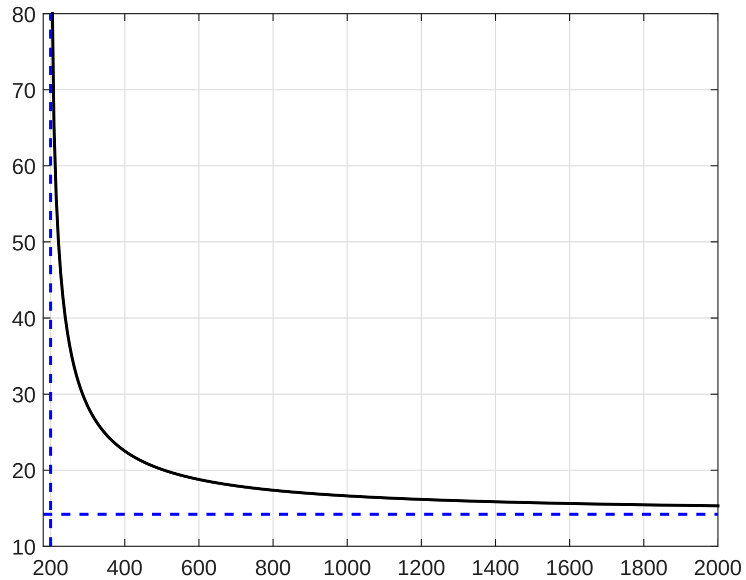
c) Under antagandet att $x > 200$ (enligt deluppgift a) får vi för tiden $T = T(x)$:

$$2x = (x - 200)1.05^T + 200 \quad \Leftrightarrow$$
$$T = \frac{1}{\ln 1.05} \ln \frac{2(x - 100)}{x - 200} = \frac{1}{\ln 1.05}\big(\ln 2 + \ln(x - 100) - \ln(x - 200)\big),$$

Eftersom $\ln(x - 200) \to -\infty$ då $x \to 200^+$, får vi

$$T(x) \to \infty \quad \text{då } x \to 200^+,$$
$$T(x) \to \frac{\ln 2}{\ln 1.05} = \frac{\ln 2}{\ln 2^{{}^2\log 1.05}} = \frac{\ln 2}{({}^2\log 1.05)\ln 2} = \frac{1}{{}^2\log 1.05} \approx 14 \quad \text{då } x \to \infty,$$
$$T'(x) = \frac{1}{\ln 1.05}\left(\frac{1}{x - 100} - \frac{1}{x - 200}\right) = -\frac{1}{\ln 1.05}\frac{100}{(x - 100)(x - 200)}.$$

Alltså är $T'(x) < 0$ då $x > 200$, dvs $T(x)$ är strängt avtagande med lodrät asymptot $x = 200$ och vågrät $T = 1/{}^2\log 1.05 \approx 14$ då $x \to \infty$, se figuren nedan.



Svar: En inverstering hinner inte fördubblas på 13 år oavsett hur mycket man inversterar.