LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

Lösningsförslag
ENDIMENSIONELL ANALYS
DELKURS B1
2016–10–28 14–19

1. *a*) $(x+3)(x+4)$ *b*) $y = 2x+9$ *c*) saknas *d*) $1/2$ *e*) $-3 < x < 1$
f) $-1, -3$ *g*) 5 *h*) $315°$ *i*) $\lg 8$ *j*) $-\frac{2}{3}$.

2. a) Dela upp i följande fall:

$x > 1/2$: Vänsterledet blir $x + 3 - (2x - 1) = -x + 4$ som är $= 1$ då $x = 3$. Korrekt lösning

$-3 \le x \le 1/2$: Vänsterledet blir nu $x+3+2x-1 = 3x+2$, vilket är $= 1$ då $x = -1/3$. Korrekt lösning.

$x < -3$: Vänsterledet blir nu $-(x+3) + (2x-1) = x - 4$ vilket är $= 1$ då $x = 5$. Eftersom $5 > -3$ är det en falsk lösning.

Svaret är därför $x = 3$ eller $-1/3$.

b) Enligt faktorsatsen ska $(-2)^3 - 3a(-2) - a^2 = 0$, dvs villkoret på a är att $a^2 - 6a + 8 = (a-4)(a-2) = 0$. Det följer att $x + 2$ delar polynom precis då $a = 2$ eller $a = 4$.

c) Skriv $f(x) = \cos(x)^{1/2}$. Då gäller att

$$f'(x) = \frac{1}{2}(\cos x)^{-1/2}(-\sin x) = -\frac{1}{2}(\cos x)^{-1/2}\sin x.$$

En derivation till ger

$$f''(x) = \frac{1}{4}(\cos x)^{-3/2}(-\sin^2 x) - \frac{1}{2}(\cos x)^{-1/2}\cos x$$

$$= -\frac{1}{4}(\cos x)^{-3/2}\sin^2 x - \frac{1}{2}(\cos x)^{1/2} = -\frac{1}{4}(\cos x)^{-3/2}(1+\cos^2 x).$$

3. a) Räknelagarna ger att

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3 + \ln x}{x^3 \arctan x} = \frac{\lim_{x\to\infty}(1 + \frac{\ln x}{x^3})}{\lim_{x\to\infty}\arctan x} = \frac{1+0}{\pi/2} = \frac{2}{\pi}.$$

b) Förläng med $x - 1$:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{x^3-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{x-1}\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^3-1} = 1 \cdot \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+x+x^2} = \frac{1}{3}.$$

Alternativt kan man naturligtvis sätta $x = 1 + t$ eller använda L'Hopitals regel.

c) När $x > 0$ har vi att högerledet är lika med

$$\frac{x^2 - 2x + 3}{x+1} = x - 3 + \frac{6}{x+1}$$

så $y = x - 3$ är asymptot då $x \to \infty$. När $x < 0$ har vi

$$\frac{x^2 + 2x + 3}{x+1} = x + 1 + \frac{2}{x+1}$$

så $y = x + 1$ är asymptot då $x \to -\infty$.

4. a) Se geometriläroboken.

b) Vi har att $2\cos(5\pi/6) = -\sqrt{3}$ och $2\sin(5\pi/6) = 1$, varför vi får att

$$\cos(2x) - \sqrt{3}\sin(2x) = 2(\sin(\frac{5\pi}{6})\cos(2x) + \cos(\frac{5\pi}{6})\sin(2x)) = 2\sin(2x + \frac{5\pi}{6}).$$

Den ursprungliga ekvationen kan därför skrivas

$$\sin(2x + \frac{5\pi}{6}) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Det följer att antingen är

$$2x + \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \Leftrightarrow \quad 2x = -\frac{7\pi}{12} + 2k\pi \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{7\pi}{24} + k\pi$$

eller så är

$$2x + \frac{5\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \Leftrightarrow \quad 2x = -\frac{\pi}{12} + 2k\pi \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{\pi}{24} + k\pi$$

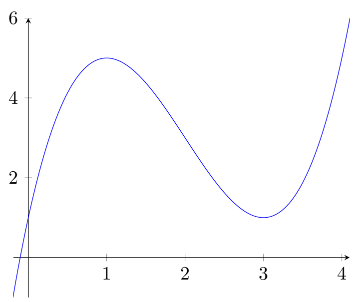
där k är ett heltal.

5. a) Kalla polynomet för $f(x)$. Vi börjar med att skissera dess graf. Vi har att

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3),$$

och får följande teckentabell:

x:		1		3	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	5	$\searrow$	1	$\nearrow$



Vi ser alltså att vi har ett lokalt maximum då $x = 1$ och ett lokalt minimum då $x = 3$. Dessutom gäller att $f(x) \to \infty$ då $x \to \infty$ och $f(x) \to -\infty$ då $x \to -\infty$ och $f(0) = 1$, så vi kan skissera funktionen som i figuren till höger.

Speciellt ser vi att det finns precis ett nollställe till funktionen, och det måste antas för ett negativt x, eftersom $f(0) = 1 > 0$. Vi har att $f(-1/2) = -1/8 - 6/4 - 9/2 + 1 < 0$, så satsen om mellanliggande värden garanterar att varje värde mellan $f(-1/2)$ och $f(0)$ antas minst en gång, alltså speciellt att det finns minst ett nollställe i intervallet $[-1/2, 0]$. Så det enda nollstället ligger i detta intervall.

b) Efter en månad är hon skyldig $1000r$ kr, där $r = 1+0.25 = 5/4$. Då betalar hon in 300 kr, och efter det är skulden $1000r - 300$. En månad senare har den vuxit till $(1000r - 300)r$ men hon betalar också in 300 kr, så skulden efter två månader är $1000r^2 - 300(1+r)$ kr. Fortsätter vi på det sättet ser vi att hon efter n månader är skyldig

$$1000r^n - 300(1 + r + r^2 + \ldots + r^{n-1}) = 1000r^n - 300\frac{r^n - 1}{r - 1} \quad \text{kr.}$$

Här har vi använt den geometriska summan i högerledet. Vi söker det n som sätter denna skuld till noll, vilket är ekvivalent med att (efter att vi satt in $r = 5/4$)

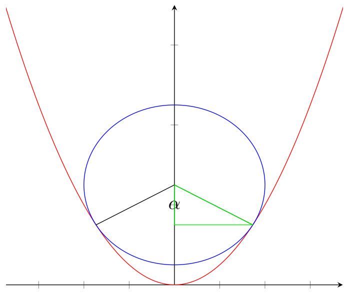
$$1000(\frac{5}{4})^n = 1200((\frac{5}{4})^n - 1) \quad \Leftrightarrow \quad 200(\frac{5}{4})^n = 1200 \quad \Leftrightarrow \quad (\frac{5}{4})^n = 6.$$

För att lösa ekvationen logaritmerar vi: $n \ln(5/4) = \ln 6$ och för att använda tabellen skriver vi om detta som

$$n = \frac{\ln 2 + \ln 3}{\ln 5 - 2\ln 2} = \frac{0.69 + 1.07}{1.60 - 2 \cdot 0.69} = \frac{176}{22} = 8.$$

Efter 8 månaders inbetalningar är hon alltså skuldfri, och då har hon total betalt $8 \cdot 300 = 2400$ kr till Ärlige Harry.

6. a) Cirkeln har en ekvation på formen $x^2 + (y-c)^2 = 1$ från vilket vi kan lösa ut $y = c \pm \sqrt{1-x^2}$. Tangeringspunkterna är på den nedre halvcirkeln, så vi väljer minustecknet. I tangeringspunkterna ska cirkel och parabel ha samma riktningsderivata, vilket betyder att



$$\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} = 2x.$$

Av figuren framgår att $x \neq 0$, så det följer att $\sqrt{1-x^2} = 1/2$, d.v.s. $x = \pm\sqrt{3}/2$. Tangeringspunkterna ges därför av $(\pm\sqrt{3}/2, 3/4)$. Drar vi den horisontella linjen mellan dessa får vi en rätvinklig triangel, grön i figuren till höger. Denna triangel har hypotenusan 1 och ena sidan är $\sqrt{3}/2$, så den andra är $1/2$. Det följer att medelpunkten $= (0, c)$ där

$$c = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4}.$$

Ur triangeln ser vi också att $\alpha = 2\pi/3$.

b) Vi vet att $\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$ och att $\cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2\theta$, och från det får vi att

$$\sin(4\theta) = 2\sin(2\theta)\cos(2\theta) = 4\sin\theta\cos\theta(1 - 2\sin^2\theta),$$

$$\cos(4\theta) = 1 - 2\sin^2(2\theta) = 1 - 8\sin^2\theta\cos^2\theta.$$

Additionsformeln för sinusfunktionen ger nu

$$\sin(5\theta) = \sin(4\theta)\cos\theta + \cos(4\theta)\sin\theta = 4\sin\theta\cos^2\theta(1 - 2\sin^2\theta) + \sin\theta(1 - 8\sin^2\theta\cos^2\theta)$$

$$= \sin\theta + 4\sin\theta\cos^2\theta - 16\sin^3\theta\cos^2\theta = 5\sin\theta - 20\sin^3\theta + 16\sin^5\theta.$$

Vi har alltså att

$$\sin(5\theta) = p(\sin\theta) \quad \text{där} \quad p(t) = 5t - 20t^3 + 16t^5.$$

För att bestämma $a = \sin\frac{\pi}{5}$, stoppa in $\theta = \pi/5$ i denna likhet. Eftersom $\sin(5\pi/5) = \sin\pi = 0$, betyder det att a ska lösa ekvationen $p(t) = 0$. Men

$$p(t) = t(5 - 20t^2 + 16t^4)$$

och eftersom $a \neq 0$ måste a vara ett nollställe till fjärdegradspolynomet. Detta är ett andragradspolynom i $u = t^2$ som har lösningarna $u = (5 \pm \sqrt{5})/8$. Det följer att a är något av talen

$$\pm\sqrt{\frac{5 \pm \sqrt{5}}{8}}.$$

Eftersom $0 < \pi/5 < \pi/4$ måste a vara ett positivt tal som är $< 1/\sqrt{2}$. Enda kandidaten för det är $\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$ eftersom $(5+\sqrt{5})/8 > 1/2$. Svaret är alltså

$$\sin\frac{\pi}{5} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}.$$