LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

LÖSNINGAR
ENDIMENSIONELL ANALYS
DELKURS B1
2015 – 10 – 29 kl 08 – 13

1. $a)\quad 1,\qquad b)\quad \dfrac{\sqrt{2}}{2},\qquad c)\quad x=-3,\qquad d)\quad x=1,\qquad e)\quad x-1,\qquad f)\quad (x-1)(x-2),$

$g)$ ingen lösning, h) y = 2x + 1, i) x < −1 och 0 < x < 1, j) x = 2.

Svar på den andra varienten är

$a)\quad 4,\qquad b)\quad -\dfrac{\sqrt{2}}{2},\qquad c)\quad x=-3,\qquad d)\quad x=\dfrac{1}{2},\qquad e)\quad x+1,\qquad f)\quad (x+2)(x-3),$

$g)$ ingen lösning, h) y = x + 1, i) x = 2, j) x < −1 och 0 < x < 1.

2. a)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2^x+3\ln x}{\sqrt{x}+e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2^x}{e^x}\cdot\frac{\left(1+\frac{3\ln x}{2^x}\right)}{\left(\frac{\sqrt{x}}{e^x}+1\right)}=0,$$

därför att $\lim_{x\to\infty}\frac{2^x}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{e}\right)^x=0$, $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{2^x}=0$ och $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{e^x}=0$.

$$\lim_{x\to 0^+}(\ln x)\ln(1+x)=\lim_{x\to 0^+}(x\ln x)\ln\left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right)=0\cdot\ln e=0.$$

b)

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin|x|}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1$$

och

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin|x|}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin(-x)}{x}==\lim_{x\to 0^-}\frac{-\sin x}{x}=-1.$$

Så är

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin|x|}{x}\neq\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin|x|}{x},$$

vilket medför att gränsvärdet $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin|x|}{x}$ inte existerar.

3. a) För $x\le\frac{1}{2}$ blir ekvationen $-(x-1)+2x=-(2x-1)$, vilket ger $x=0\le\frac{1}{2}$.
Så är $x=0$ en lösning.
För $\frac{1}{2}<x\le 1$ blir ekvationen $-(x-1)+2x=(2x-1)$ som ger $x=2$. Men $x=2$ uppfyller inte villkoret $\frac{1}{2}<x\le 1$. Så är $x=2$ en falsk lösning.
För $x>1$ blir ekvationen $(x-1)+2x=(2x-1)$ som ger $x=0$.Men $x=0$ uppfyller inte villkoret $x>1$. Så bidrar fallet $x>1$ ingen lösning.
Svar: Lösningen är $x=0$.

b) Då $x=6$ gäller

$$3\cdot{}^4\!\log x-2\cdot{}^4\!\log(x-3)=3\cdot{}^4\!\log 6-2\cdot{}^4\!\log 3={}^4\!\log 6+2\cdot{}^4\!\log 6-2\cdot{}^4\!\log 3$$

$$={}^4\!\log 6+2\cdot{}^4\!\log\frac{6}{3}={}^4\!\log 6+{}^4\!\log 2^2={}^4\!\log 6+1.$$

Så är $x = 6$ en rot av ekvationen. Å andra sidan, har vi att

$$3 \cdot {}^4\log x - 2 \cdot {}^4\log(x-3) = 1 + {}^4\log 6$$

$$\implies \quad {}^4\log\left(\frac{x^3}{(x-3)^2}\right) = {}^4\log 24 \quad \implies \quad \frac{x^3}{(x-3)^2} = 24$$

$$\implies \quad x^3 = 24(x-3)^2 \quad \implies \quad x^3 - 24x^2 + 144x - 216 = 0.$$

Så är $x = 6$ en rot till ekvationen $x^3 - 24x^2 + 144x - 216 = 0$. Alltså är $x - 6$ en faktor till polynomet. Polynomdivision medför

$$x^3 - 24x^2 + 144x - 216 = (x-6)(x^2 - 18x + 36),$$

som också ger $x = 9 \pm 3\sqrt{5}$. Men $x = 9 - 3\sqrt{5}$ är en falsk rot till den ursprungliga ekvationen, därför att $x = 9 - 3\sqrt{5} < 3$.
Svar: Lösningarna är $x_1 = 6$ och $x_2 = 9 + 3\sqrt{5}$.

4. a)

$$(1+4x^2)\left(2 - \frac{1}{x}\right)^{20} = (1+4x^2)\sum_{k=0}^{20}\binom{20}{k}2^{20-k}\left(\frac{-1}{x}\right)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{20}\binom{20}{k}2^{20-k}\left(\frac{-1}{x}\right)^k + 4x^2\sum_{k=0}^{20}\binom{20}{k}2^{20-k}\left(\frac{-1}{x}\right)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{20}\binom{20}{k}2^{20-k}(-1)^k x^{-k} + 4\sum_{k=0}^{20}\binom{20}{k}2^{20-k}(-1)^k x^{2-k}.$$

Den sökta konstanttermen är

$$\binom{20}{0}2^{20-0}(-1)^0 + 4\binom{20}{2}2^{20-2}(-1)^2 = 2^{20} + 4 \cdot \frac{20 \cdot 19}{2!} \cdot 2^{18} = 191 \cdot 2^{20}.$$

b) Antag att cirkelsektorn har medelpunktsvinkel α radianer.
Eftersom cirkelsektorns area är $\frac{\pi}{8}$, så är $\frac{\alpha}{2\pi} \cdot \pi \cdot 1^2 = \frac{\pi}{8}$, som ger $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Enligt cosinussatsen har vi

$$|AB|^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos\frac{\pi}{4} = 2 - \sqrt{2},$$

som medför att längden $|AB| = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$.

5. a) Se boken.

b) Vi har

$$\left(\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)\right)' = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2} \cdot \frac{\sqrt{1-x^2} - x \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x)}{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1 - x^2 + x^2} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (\arcsin x)'.$$

Enligt uppgift $a)$ finns det något konstant C så att likheten

$$\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \arcsin x + C$$

gäller i intervallet $]-1,1[$. Insättning av $x=0$ i likheten medför att $C=0$. Så gäller

$$\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)=\arcsin x \quad \text{i} \quad]-1,1[.$$

c) Vi deriverar ekvationens båda led med avseende på x och får då:

$$1+2yy'+y'\sin x+y\cos x=3y^2y'.$$

Insättning av $x=\frac{\pi}{2}$ och $y=0$ medför $y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$. Så är ekvationen av tangenten

$$y-0=-\left(x-\frac{\pi}{2}\right), \quad \text{dvs,} \quad x+y=\frac{\pi}{2}.$$

6. a) Se boken.

b) Skärningspunkten (x,y) för de två linjerna uppfyller ekvationerna $y=kx$ och $y=\frac{1}{k}x+k$. Så gäller $kx=\frac{1}{k}x+k$, vilket ger $x=\frac{k^2}{k^2-1}$ och $y=\frac{k^3}{k^2-1}$.
Triangelns sida som ligger på x-axeln har längden k^2 och höjden $\frac{k^3}{k^2-1}$. Arean av triangeln alltså är $A(k)=\frac{1}{2}\frac{k^5}{k^2-1}$. Vi söker efter det minsta värdet av funktionen

$$A(k)=\frac{k^5}{2(k^2-1)}, \qquad k>1.$$

Vi har

$$A'(k)=\frac{5k^4(k^2-1)-k^5 2k}{2(k^2-1)^2}=\frac{3k^6-5k^4}{2(k^2-1)^2}=\frac{k^4(3k^2-5)}{2(k^2-1)^2}.$$

Det finns alltså endast en stationär punkt $k=\sqrt{\frac{5}{3}}$ i intervallet $k>1$. Eftersom funktionen $A(k)$ är kontinuerlig i $]1,\ \infty[$ och $\lim_{k\to 1^+}A(k)=\lim_{k\to\infty}A(k)=\infty$, så är $A\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right)=\frac{25}{12}\sqrt{\frac{5}{3}}$ den sökta minsta arean.