

Hjälpmedel: Inga.

Lösningarna skall vara försedda med ordentliga motiveringar. Skriv fullständiga meningar och förklara dina beteckningar. Ge tydliga och enkla svar där så är möjligt.

Godkäntdel

För att bli godkänd krävs dels minst 9 av 18 poäng på godkäntdelen (här kan eventuell bonuspoäng räknas in), dels att högst en uppgift bedöms med 0 poäng.

1. Till denna uppgift krävs endast svar. Eventuella fullständiga lösningar kommer inte att bedömas. 0-3 rätt ger 0 poäng på uppgiften, 4 rätt ger 1 poäng, 5 rätt ger 2 poäng och 6 rätt ger 3 poäng.

- Kvadratkomplettera uttrycket $x^2 + 10x + 10$.
- Skriv uttrycket $\sqrt{32} + \sqrt{8}$ på formen $a\sqrt{2}$, där a är ett heltal.
- Lös ekvationen $\ln(x+3) + \ln(x+4) = \ln(72)$.
- Lös olikheten $x^2 - 7x + 12 > 0$.
- Förenkla dubbelbråket $\frac{-\frac{3}{4} + \frac{2}{3}}{\frac{1}{2} - \frac{3}{2}}$.
- Vad är $\sin 120^\circ$? Ange det exakta värdet.

2. Lös ekvationerna fullständigt:

$$\text{a) } \frac{x^3 - 2x^2 - 7x + 2}{x^2 - 1} = 0, \quad \text{b) } |2x + 1| - |x + 3| = 1.$$

3. Beräkna gränsvärdena

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^3 - x - 6} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{\sin 3x} \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - 5})$$

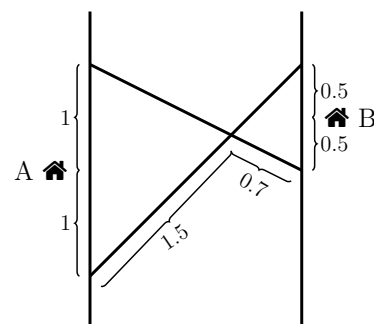
4. Definiera vad som menas med att funktionen f är kontinuerlig i punkten $x = a$. Avgör om funktionen

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{x} \sin \frac{1}{x}, & \text{då } x > 0 \\ x^2, & \text{då } x \leq 0 \end{cases}$$

är kontinuerlig i $x = 0$.

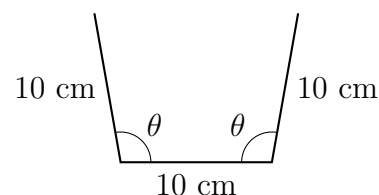
5. Alfons bor i hus A och ska besöka sin kompis Berit som bor i hus B, se vägkartan. Alla mått på (den dåligt ritade) kartan är i km, alla vägar är raka, och de två vägarna som går i nord-sydlig riktning är parallella.

Hur lång är den kortaste vägen från hus A till hus B?



6. Ossian vill bygga en ny hängränna från en 30 cm bred plåt. Han böjer plåten till en ränna med ett tvärsnitt som ser ut som figuren till höger.

Hur ska Ossian välja vinkeln θ så att tvärsnittsarean blir så stor som möjligt?



Överbetygsdel

Om du klarat godkänddelen har du chans på överbetyg. För betyget 4 krävs minst 4 poäng på denna del. För betyget 5, krävs minst 7 poäng. Eventuell bonuspoäng kan användas på överbetygsdelen om den inte behövdes på godkänddelen.

7. Visa att $2 + x \geq 3x^{1/3}$ för alla $x \geq 0$.

8. Koffeinhalten $c(t)$ (där $t \geq 0$ mäter antal minuter efter intaget) i blodet efter man har druckit stora mängder kaffe varierar som

$$c(t) = \frac{\alpha}{\alpha - \beta}(e^{-\beta t} - e^{-\alpha t})$$

där $\alpha > \beta > 0$ och α mäter hur fort koffein absorberas av mag-tarmkanalen, och β mäter hur fort koffeinet utsöndras ur blodet. Vid vilken tidpunkt t är koffeinhalten som störst? (Svaret kommer att bero av α och β .)

9. Triangeln $\triangle ABC$ är spetsvinklig (dvs. alla vinklar är spetsiga). Dra en cirkel med diameter AB och en cirkel med diameter AC . Visa att den ena av cirklarnas skärningspunkter ligger på sträckan BC .

10. Låt $a \neq 0$ vara ett reellt tal. Hur många olika reella tal b finns det, sådana att

$$\frac{a}{b} = \frac{e^a}{e^b}?$$