LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
ENDIMENSIONELL ANALYS B1
2019-10-26 kl 8.00–13.00

Inga hjälpmedel är tillåtna. För att du ska erhålla full poäng skall dina lösningar vara läsbara och försedda med ordentliga motiveringar. Lämna tydliga svar. Varje uppgift kan som mest ge 3 poäng.

Godkäntdel

För att bli godkänd krävs dels högst en uppgift med 0 poäng av dessa sex uppgifter, dels minst 9 poäng (här kan eventuell bonuspoäng räknas in) av 18 möjliga.

1. *Till denna uppgift krävs endast svar. Eventuella lösningar kommer ej att bedömas. 0–3 rätt ger 0 poäng, 4 rätt ger 1 poäng, 5 rätt ger 2 poäng och 6 rätt ger 3 poäng.*

a) Lös ekvationen $2\ln(x+4) - \ln(13x+10) = 0$.

b) Lös olikheten
$$\frac{-6x-23}{x+4} > -4.$$

c) Förenkla ${}^{5}\log\left(\frac{1}{25}\right)$.

d) För vilka vinklar, med $0^\circ \leq v < 360^\circ$ gäller det att $\sin v = \frac{\sqrt{3}}{2}$?

e) Låt l vara linjen som går genom punkten $(5,3)$ och är parallell med linjen $y = 2x-5$. Ange en ekvation för l på formen $y = kx + m$.

f) Skriv polynomet $x^2 - 3x + 2$ som en produkt av förstagradsfaktorer. Faktorerna ska ha ledande koefficient lika med 1.

2. Beräkna
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\sin 2x}, \qquad \lim_{x\to -\infty} (\sqrt{x^2 - x} + x), \qquad \frac{d}{dx}\left(e^{2x}\sin(\cos x)\right).$$

3. Formulera medelvärdessatsen. Illustrera den sedan med en figur för exemplet $f(x) = x^3$ på intervallet $[0,1]$, och kontrollera att satsen stämmer för detta exempel.

4. Låt funktionen f med definitionsmängd $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ definieras av $f(x) = x + \frac{1}{x}$. Skissa grafen till f, där speciellt alla eventuella stationära punkter och asymptoter ska finnas med. Bestäm värdemängden V_f.

5. Skissa en hyperbel med asymptoter $y = 2x$ och $y = -2x$ och som skär y-axeln då $y = 1/2$ och då $y = -1/2$. Vad är ekvationen för denna hyperbel?

6. Ett fartyg lämnar hamnen klockan 13.00 och åker norrut med en hastighet av 30 knop (d.v.s. nautiska mil i timmen). Klockan 15.00 justerar fartyget sin riktning västerut med vinkeln 60°. (Vinkeln mäts så att en justering med 0° innebär att fartyget fortsätter rakt fram.) Hur stort är avståndet (i nautiska mil) mellan skeppet och hamnen klockan 16.00? Hur snabbt ökar detta avstånd vid samma tidpunkt? Trigonometriska uttryck får inte finnas med i svaret.

VAR GOD VÄND!

Överbetygsdel

Om du klarat godkäntdelen har du chans att få överbetyg. För att få betyg 4 krävs minst 4 poäng på denna del. För betyg 5 krävs minst 7 poäng.

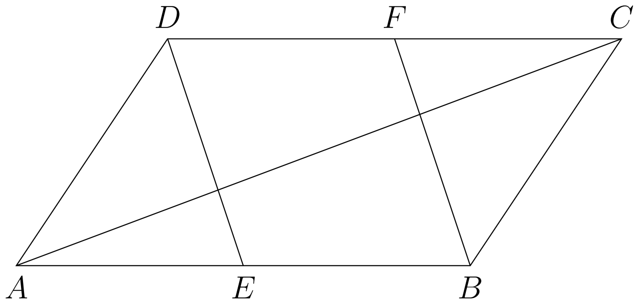
7. Kurvan $x^3+y^3+y^2-4x=5$ definierar y som funktion av x i närheten av punkten $(x,y)=(-1,1)$. Tangent- och normallinjen till kurvan i denna punkt begränsar tillsammans med x-axeln en triangel i planet. Bestäm triangelns area.

8. Låt f vara funktionen som definieras för alla $x \in \mathbb{R}$ av

$$f(x) = \begin{cases} a^2 e^{ax}, & \text{då } x \geq 0, \\ (x+a)^2, & \text{då } x < 0. \end{cases}$$

Visa att f är kontinuerlig i $x=0$ för varje värde på konstanten a. Bestäm sedan alla värden på a för vilka f är deriverbar i $x=0$. Vad är $f'(0)$ för dessa värden på a?

9. I parallellogrammen $ABCD$, markeras mittpunkterna på sidorna AB och CD med E respektive F. Drag BF, ED och AC (se figur). Visa att diagonalen AC delas i tre lika stora delar av linjerna ED och BF.



10. Studenterna vid en teknisk högskola arrangerar årligen en kombinerad löpnings- och simtävling vid en cirkulär sjö. Målet är att ta sig från punkt A till punkt B, där A och B ligger på diametralt motsatta sidor av sjön. En tävlande kan välja att springa från A till B längs stranden, att simma längs diametern eller att kombinera simning och löpning genom att simma från A till en punkt någonstans på stranden och springa därifrån längs stranden till punkt B. Vilken är den bästa strategin för en tävlande som springer dubbelt så fort som hen simmar? Vi antar att det inte tar någon extra tid att växla mellan simning och löpning.