

Inga hjälpmedel är tillåtna. Lösningarna ska vara försedda med ordentliga motiveringar.

## Godkändtel

För att bli godkänd krävs dels högst en uppgift med 0 poäng av dessa sex uppgifter, dels minst 9 poäng (här kan eventuell bonuspoäng räknas in) av 18 möjliga.

1. Till denna uppgift krävs endast svar. Eventuella lösningar kommer ej att bedömas. 0-3 rätt ger 0 poäng, 4 rätt ger 1 poäng, 5 rätt ger 2 poäng och 6 rätt ger 3 poäng.
  - a) Beräkna  $\sin 315^\circ$ ?
  - b) Låt  $\ell$  vara linjen som går genom punkterna  $(-1, 2)$  och  $(3, 3)$ . Ange en ekvation för  $\ell$  på formen  $y = kx + m$ .
  - c) Lös ekvationen  $\sqrt{5x + 4} = \sqrt{-4x - 4}$ .
  - d) Lös ekvationen  $\ln(x + 5) + \ln(-x + 11) = \ln 63$ .
  - e) Lös olikheten  $\frac{x + 3}{x + 2} \geq 2$ .
  - f) Faktorisera polynomet  $x^2 + 4x + 3$ .
2. Formulera och bevisa Pythagoras sats.
3. Rita följande kurvor i samma koordinatsystem:

$$25x^2 + 16y^2 - 32y = 384, \quad y = \frac{1}{2}x^2 - 2 \text{ då } |x| \leq 2,$$
$$\left(|x| - \frac{3}{2}\right)^2 + (y - 2)^2 = 1, \quad y = 1 - |x| \text{ då } |x| \leq \frac{1}{2}.$$

4. Utred alla implikationer mellan följande utsagor:

$$A : \sum_{k=100}^{\infty} x^k \text{ är konvergent,}$$

$$B : 0 \leq \arcsin x < \frac{\pi}{2},$$

$$C : x^4 - x^3 < 0.$$

5. Beräkna

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \arctan(1/x)}{\sin 3x}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3e^x - e \cdot 3^x}{\sqrt{5} \cdot 9^x + \ln x}$$

$$\text{c) } f'(\ln 2) \text{ där } f(x) = \ln(e^x + e^{-x})$$

6. Rita grafen av funktionen  $f(x) = e^{\frac{\ln x}{\sqrt{x}}}$ ,  $x > 0$ , och ange funktionens värdemängd.

Var god vänd!

## Överbetygsdel

Om du har klarat godkänddelen, så kan du få överbetyg genom att lösa följande problem. För att få betyg 4 krävs på denna del minst 4 poäng och för betyg 5 minst 7 poäng.

7. En cirkel är inskriven i en rätvinklig triangel. Cirkelns tangeringspunkt i hypotenusan delar denna i två delar med längderna  $a$  och  $b$ . Visa att triangelns area är  $ab$ .

8. Visa formeln

$${}^a\log b = \frac{1}{{}^b\log a}, \quad \text{där } a, b > 0 \text{ och } a \neq 1, b \neq 1,$$

och lös ekvationen

$$\frac{{}^x\log 2}{{}^7\log 2} = 2, \quad x > 0.$$

9. Beräkna exakt  $\cos(\arcsin(-1/5))$  samt  $\tan(\arccos(-1/5))$ .

10. Bakterier behöver näring (substrat) för att växa. Tillväxthastigheten  $\mu$  är beroende av substratkoncentrationen  $S$ . Enligt vissa modeller blir tillväxthastigheten högre ju mer näring som finns, medan andra inkluderar att tillväxthastigheten avtar för större  $S$ , eftersom bakterierna blir förgiftade av för mycket näring. En modell ges av följande funktion:

$$\mu(S) = \hat{\mu} \frac{S(1 + \beta S/K_i)}{K + S + S^2/K_i}, \quad S \geq 0,$$

där  $\hat{\mu}$ ,  $\beta$ ,  $K_i$  och  $K$  är parametrar. Ange den största möjliga tillväxthastigheten för olika värden på parametern  $\beta \geq 0$  då övriga parametrar har värdena  $\hat{\mu} = 1$ ,  $K = 1$ ,  $K_i = 4$ .