LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
ENDIMENSIONELL ANALYS B1
2019-04-29 kl 8–13

Lösningarna på uppgifterna 2-10 skall vara försedda med ordentliga motiveringar. För uppgift 1 krävs endast svar. Nödvändigt villkor för godkänt är 9p på godkäntdelen samt 0 poäng på högst en uppgift på godkäntdelen. Bonuspoäng kan endast tillräknas om man har 0 poäng på högst en uppgift på godkäntdelen. INGA HJÄLPMEDEL.

Godkäntdel

1. *Här ger* $0-3$ *rätt* 0*p,* 4 *rätt ger* 1*p,* 5 *rätt ger* 2*p och* 6 *rätt ger* 3*p.*

a) Ange det exakta värdet av $\tan 30°$.

b) Lös ekvationen $\cos x = -1/2$.

c) Lös ekvationen $(x-2)(x+5) = x-7$.

d) Skriv $\ln 24 - 3\ln 2$ som en enda logaritm. Förenkla så långt som möjligt.

e) I en triangel är två sidor 1 cm och vinkeln mellan dem $60°$. Hur lång är den tredje sidan?

f) Lös ekvationen $16^x - 12 \cdot 4^x + 32 = 0$.

2. Beräkna gränsvärdena

$$\textbf{a)} \lim_{x\to\infty} \frac{\sin x + x - \ln(\sqrt{x})}{2x - \sqrt{x}\ln(x^3)}, \quad \textbf{b)} \lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+2x} - x, \quad \textbf{c)} \lim_{x\to 0^+} (x+x^3+x^4)\ln(x^2).$$

3. Skissera grafen till funktionen

$$f(x) = \frac{x^3+1}{x^3-1}.$$

Bestäm funktionen stationära punkter, lokala extrempunkter och asymptoter.

4. Formulera och bevisa parallellogramsatsen.

5. Bevisa olikheten $\ln(1+x) \le x$, för alla $x > -1$.

6. Ur ett givet klot skär man ut en cylinder med maximal volym. Bestäm förhållandet mellan cylinderns och klotets volymer. (Med cylinder menas här en vanlig rak cirkulär cylinder).

Överbetygsdel

På denna del ger 4p *betyg* 4 *och* 7p *betyg* 5 *förutsatt att man har klarat godkäntdelen.*

7. Anna hävdar att

$$\arcsin x = \arccos(\sqrt{1-x^2}), \quad -1 \leq x \leq 1.$$

Bo hävdar att

$$\arcsin |x| = \arccos(\sqrt{1-x^2}), \quad -1 \leq x \leq 1.$$

Carl hävdar att

$$\arctan x = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right), \quad \text{för alla reella } x.$$

Utred vilka som har rätt.

8. Låt

$$f(x) = (x+1)^{10}\left(\frac{1}{x}+1\right)^{10}.$$

a) Bestäm koefficienten framför x^9. (Svaret får ej innehålla någon binomialkoefficient.)

b) Bestäm konstanttermen i $f(x)$ när man utvecklat parenteserna. (Svaret får lov att innehålla en binomialkoefficient.)

9. Låt $l_1 : y = x$ och $l_2 : y = 0$ vara två linjer och $P = (6, 2)$ en punkt i planet. Bestäm en cirkel som tangerar båda linjerna och går igenom punkten.

10. a) Betrakta funktionen

$$f(x) = \tan x.$$

Visa att $f'(x) = 1$ precis där f skär x-axeln.

b) Låt $g(x)$ och $h(x) \neq 0$ vara två stycken två gånger deriverbara funktioner och sätt $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$. Antag dessutom att $g'(x) \neq 0$ då $f(x) = 0$. Ge tillräckliga och nödvändiga villkor på h för att vinkeln mellan tangenten till $y = f(x)$ och x-axeln, då grafen till f skär x-axeln, är 45°.

LYCKA TILL!