

Inga hjälpmedel är tillåtna. För att du skall kunna erhålla full poäng skall dina lösningar vara läsbara och försedda med ordentliga motiveringar. Lämna tydliga svar. Varje uppgift kan som mest ge 3 poäng. Eventuell bonuspoäng erhålls antingen på godkänddelen eller överkursdelen.

### Godkänddel

För att bli godkänd krävs dels högst en uppgift med 0 poäng av dessa sex uppgifter, dels minst 9 poäng (här kan eventuell bonuspoäng räknas in) av 18 möjliga.

1. Till denna uppgift krävs endast svar. Eventuella lösningar kommer ej att bedömas. 0–3 rätt ger 0 poäng, 4 rätt ger 1 poäng, 5 rätt ger 2 poäng och 6 rätt ger 3 poäng.
  - a) Lös ekvationen  $\ln(x + 3) + \ln(x + 4) = \ln 42$ .
  - b) Skriv uttrycket  $\sqrt{3} + \sqrt{12}$  på formen  $a\sqrt{3}$  där  $a$  är ett heltal.
  - c) Låt  $\ell$  vara linjen som går genom punkten  $(-1, 2)$  och som har riktningskoefficient 2. Ange en ekvation för  $\ell$  på formen  $y = kx + m$ .
  - d) Lös ekvationen  $\sqrt{2 - 4x} = \sqrt{3 - 2x}$ .
  - e) Bestäm  $\sin(210^\circ)$  exakt.
  - f) Lös ekvationen  $\frac{1}{x^3 - 4x} = \frac{1}{12x}$ .
2. Bestäm
  - a)  $\frac{d^2}{dx^2} \cos(x^2)$ ,
  - b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x + \ln x}{x^2 + 3^x}$ ,
  - c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(2x)}{\sin(3x^2)}$ .
3. Definiera vad som menas med absolutbeloppet av det reella talet  $x$ . Rita grafen till funktionen  $f(x) = |2x + 1| + 2|x - 1|$  då  $x \in [-3, 3]$ . Har ekvationen  $f(x) = 5$  någon lösning i detta intervall?
4. Ange för vilka  $x$  som serien  $\sum_{k=2}^{+\infty} x^k$  konvergerar och lös olikheten
$$\sum_{k=2}^{+\infty} x^k \geq \frac{1}{2}.$$
5. Linjen  $\ell_1$  skär en given cirkel i punkterna  $A$  och  $B$  så att bågen  $AB$  utgör en tiondel av cirkelns totala omkrets. Linjen  $\ell_2$  tangerar samma cirkel i punkten  $A$ . Under vilken vinkel skär linjerna  $\ell_1$  och  $\ell_2$  varandra?
6. Kostnaden för att köra ett visst stort fullastat fraktskepp en timme med farten  $v$  knop har empiriskt bestämts till  $10v^3 + 20\,000$  SEK (1 knop är lika med 1 sjömil per timme). Här står termen  $10v^3$  för bränslekostnader och 20 000 för övriga kostnader. Skeppet, som maximalt kan färdas i 25 knop, skall en dag köra fullastad från Trelleborg till Travemünde, en resa på 611 sjömil. Med vilken konstant fart skall överresan ske för att den totala kostnaden skall minimeras?

## Överbetygsdel

Om du klarat godkänddelen har du chans på överbetyg. För att få betyg 4 krävs minst 4 poäng på denna del. För betyg 5 krävs minst 7 poäng.

7. För vilka reella tal  $x$  gäller det att  $11 \sin x + \cos 2x \geq 6$ ?

8. Bestäm talen  $a$  och  $b$  så att funktionen  $f$ , definierad som

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - x^2 + ax + b}{x + 3}, & x \neq -3, \\ 20, & x = -3, \end{cases}$$

blir kontinuerlig på hela  $\mathbb{R}$ . Blir  $f$  deriverbar i  $x = -3$  för dessa värden på  $a$  och  $b$ ?

9. I  $\triangle ABC$  gäller det att vinkeln vid  $A$  är dubbelt så stor som vinkeln vid  $C$ , sidan  $BC$  är 2 cm längre än sidan  $AB$ , och att  $AC = 5$  cm. Bestäm sidorna  $AB$  och  $BC$ .

10. I flera formelsamlingar förekommer olikheten

$$\ln(1 + x) \geq \frac{x}{1 + x}, \quad x \geq 0.$$

Olikheten ovan kan förbättras. Bestäm det minsta positiva tal  $a$  sådant att

$$\ln(1 + x) \geq \frac{x}{1 + ax}, \quad x \geq 0.$$