LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

LÖSNINGAR
ENDIMENSIONELL ANALYS B2/A3
2019-08-26 kl 08.00–13.00

1. kvadratkomplettering ger $(z+2+i)^2 = -3+4i$ och därmed, $z=-3-3i$, $z=-1+i$.

2. Se boken för definitionen. Via Maclaurinutveckling fås: $\ln(1+x)-x = -\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+x^4B_1(x)$ samt $1-\cos x = \dfrac{x^2}{2}+x^4B_2(x)$, därmed blir gränsvärdet lika med -1.

3. Svar: $\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}$, respektive $2-2\ln 2$.

4. Med integrerande faktorn $1/x$ fås $y(x)=x(x+C)$ och randvillkoret ger $y(x)=x(x+1)$.

5. Homogenlösning $y_h(x)=Ae^{-2x}+Be^{-x}$, partikulärlösning $y_p(x)=\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{4}$. Begynnelsevillkoren ger $y(x)=\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{4}-\dfrac{3}{4}e^{-2x}+2e^{-x}$.

6. Rotationsvolym:$V=\pi\displaystyle\int_1^2 4x^3\,dx = 15\pi$.
Kurvlängd: $L=\displaystyle\int_1^2\sqrt{1+9x}\,dx=\frac{2}{27}(19^{3/2}-10^{3/2})$.

7. Integralen kan beräknas som $I=2\displaystyle\int_0^1 e^x\cos x\,dx = e(\sin 1+\cos 1)-1$.

8. Se avsnittet om integraluppskattning i boken. För uppskattningen, $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{k^2}+F$, där $F=\displaystyle\sum_{k=11}^{\infty}\frac{1}{k^2}$, som uppskattas (efter nödvändiga gränsövergångar) genom $\displaystyle\int_{11}^{\infty}\frac{1}{x^2}\,dx\le F\le\int_{11}^{\infty}\frac{1}{x^2}\,dx+\frac{1}{121}$.
Slutligen: $F\in[\dfrac{11}{121},\dfrac{12}{121}]$.

9. Differentialekvationen blir $y'(t)=ry(t)(K-y(t))-\alpha y(t);\quad y(0)=K$. För $\alpha\ge rK$ är $y'<0$, dvs monotont avtagande för alla begynnelsevillkor $y(0)=b$, med $b\in(0,K]$, med gränsvärde noll för $t\to\infty$. Minsta värdet är precis $\alpha=rK$ eftersom lägre värden på α ger att en jämviktslösning nås för $y>0$.

10. $L(x)=\displaystyle\int_0^x\sqrt{(}1+e^{-2t})\,dx$. Man har: $L(0)=0$, $L'(x)=\sqrt{1+e^{-2x}}$; $L'(0)=\sqrt{2}$, $L''(x)=-\dfrac{e^{-2x}}{\sqrt{1+e^{-2x}}}$; $L''(0)=-1/\sqrt{2}$ och $L^{(3)}(x)=\dfrac{e^{-2x}(2+e^{-2x})}{(1+e^{-2x})^{3/2}}$. Via Maclaurinutvecklingen fås: $|f(x)-p_2(x)|\le R_3(x)$ samt $R_3(1/2)\le\frac{1}{3!}(\frac{1}{2})^3\frac{3}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{64}$. Därmed $|f(1/2)-p_2(1/2)|\le 0.03$. Slutligen, $p_2(1/2)=0+\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{1}{8\sqrt{2}}=\dfrac{7\sqrt{2}}{16}$.