LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

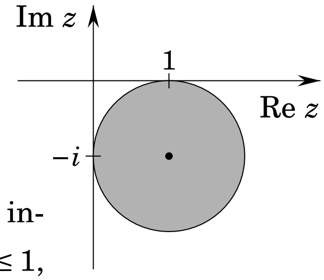
LÖSNINGAR
ENDIMENSIONELL ANALYS A3/B2
2019–03–23 kl. 8–13

1. Arean av ges av $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin x\,dx = \Big[-\cos x\Big]_0^{\pi/2} = 1$, medan volymen blir

$$\pi\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\,dx = \pi\int_0^{\pi/2}\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\cos 2x\right)dx = \pi\left[\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\pi/2} = \tfrac{1}{4}\pi^2.$$

2. Omskrivning till potensform ger att

$$\frac{(1+i)^7}{(-\sqrt{3}+3i)^4} = \frac{\left(\sqrt{2}e^{i\pi/4}\right)^7}{\left(2\sqrt{3}e^{i2\pi/3}\right)^4} = \frac{2^{7/2}e^{i7\pi/4}}{2^4\cdot 9e^{i8\pi/3}} =$$
$$= \tfrac{1}{9\sqrt{2}}e^{i(-11\pi/12)} = \tfrac{1}{9\sqrt{2}}e^{i13\pi/12}.$$



Absolutbeloppet är alltså $\frac{1}{9\sqrt{2}}$, medan ett argument i det sökta intervallet blir $\frac{13\pi}{12}$. Slutligen, eftersom $|z-1+i|\le 1 \Leftrightarrow |z-(1-i)|\le 1$, söker vi alla z vars avstånd till $1-i$ i det komplexa talplanet är mindre än eller lika med 1. Vi får då figuren till höger.

3. För definitionen av Maclaurinpolynomet $p_n(x)$ se läroboken sidan 258. Maclaurinutveckling ger att

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-e^{x/2}}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+B_1(x)x^3-\left(1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}x^2+B_2(x)x^3\right)}{x^2} =$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{4}x^2+B_3(x)x^3}{x^2} = \lim_{x\to 0}\left(-\tfrac{1}{4}+B_3(x)x\right) = -\tfrac{1}{4}+0 = -\tfrac{1}{4},$$

där alla $B_i(x)$ är begränsade i en omgivning av $x=0$.

4. För definitionen av att den generaliserade integralen $\int_a^\infty f(x)\,dx$ är konvergent, se läroboken sidan 321. Faktorisering av nämnare och partialbråksuppdelning ger att

$$\int_2^B \frac{1}{x^3-x}\,dx = \int_2^B \frac{1}{x(x-1)(x+1)}\,dx = \int_2^B\left(-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2}\frac{1}{x+1}\right)dx =$$
$$= \left[-\ln x+\tfrac{1}{2}\ln(x-1)+\tfrac{1}{2}\ln(x+1)\right]_2^B = \left[\tfrac{1}{2}\ln\tfrac{x^2-1}{x^2}\right]_2^B =$$
$$= \tfrac{1}{2}\ln\tfrac{B^2-1}{B^2}-\tfrac{1}{2}\ln\tfrac{3}{4} = \tfrac{1}{2}\ln\left(1-\tfrac{1}{B^2}\right)+\tfrac{1}{2}\ln\tfrac{4}{3}.$$

Vi får nu att

$$\int_2^\infty \frac{1}{x^3-x}\,dx = \lim_{B\to\infty}\left(\tfrac{1}{2}\ln\left(1-\tfrac{1}{B^2}\right)+\tfrac{1}{2}\ln\tfrac{4}{3}\right) = \tfrac{1}{2}\ln 1+\tfrac{1}{2}\ln\tfrac{4}{3} = \tfrac{1}{2}\ln\tfrac{4}{3}.$$

5. Eftersom det är en linjär ekvation ges samtliga lösningar av $y = y_h + y_p$, där y_p är en partikulärlösning till ekvationen och y_h är samtliga lösningar till motsvarande homogena ekvation.

Den karakteristiska ekvationen $p(r) = r^2 + 4 = 0$ har rötterna $r_{1,2} = \pm 2i$ så vi får

$$y_h = e^{0x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x,$$

där C_1, C_2 är godtyckliga konstanter.

Vi tar nu fram en partikulärlösning y_p. Det gäller att $y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$, där y_{p_1}, y_{p_2} är partikulärlösningar till ekvationen

$$y'' + 4y = x \qquad \text{respektive} \qquad y'' + 4y = e^{3x}.$$

För y_{p_1} ansätter vi $y = Ax + B$, vilket ger $y' = A$, $y'' = 0$, och sätter in i den första ekvationen: $0 + 4(Ax + B) = x \Leftrightarrow 4Ax + 4B = x$. Detta ger $A = 1/4, B = 0$, och således en partikulärlösning $y_{p_1} = \frac{1}{4}x$. För y_{p_2} sätter vi $y(x) = z(x)e^{3x}$, vilket ger $y' = (z' + 3z)e^{3x}$, $y'' = (z'' + 6z' + 9z)e^{3x}$, och insättning i den andra ekvationen ger

$$e^{3x}\left((z'' + 6z' + 9z) + 4z\right) = e^{3x} \qquad \Leftrightarrow \qquad z'' + 6z' + 13z = 1.$$

Vi ser att denna har en lösning $z = 1/13$, vilket ger att $y_{p_2} = \frac{1}{13}e^{3x}$.

Sammantaget får vi nu alla lösningar till ekvationen $y'' + 4y = x + e^{3x}$ genom

$$y = y_h + y_{p_1} + y_{p_2} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \tfrac{1}{4}x + \tfrac{1}{13}e^{3x},$$

där C_1, C_2 är godtyckliga konstanter.

6. Låt $y(t)$ vara antalet fiskar i sjön vid tidpunkten t år. Differentialekvationen blir då

$$y'(t) = 100 - \tfrac{1}{10}y(t).$$

Detta är en linjär ekvation av första ordningen som vi kan lösa med integrerande faktor (ekvationen är även separabel):

$$\begin{aligned} y' = 100 - \tfrac{1}{10}y \quad &\Leftrightarrow \quad y' + \tfrac{1}{10}y = 100 \quad \Leftrightarrow \quad \left(e^{t/10}y\right)' = 100e^{t/10} \\ &\Leftrightarrow \quad e^{t/10}y = 1000e^{t/10} + C \quad \Leftrightarrow \quad y = 1000 + Ce^{-t/10}. \end{aligned}$$

Begynnelsevillkoret $y(0) = 800$ ger att $y(0) = 1000 + Ce^0 = 800$, dvs. att $C = -200$, vilket gör att vi 5 år senare har $y(5) = 1000 - 200e^{-1/2} \approx 880$ fiskar i sjön. Efter lång tid närmar sig populationen $\lim_{t\to\infty}\left(1000 - 200e^{-t/10}\right) = 1000$ individer.

7. Ledvis derivering med hjälp av analysens huvudsats ger att

$$y(x) = -2 + \int_0^x y(t)\cos 2t\,dt \qquad \Rightarrow \qquad y'(x) = y(x)\cos 2x.$$

Vi får en ekvation som löses med integrerande faktor (eller som separabel ekvation):

$$\begin{aligned} y' = y\cos 2x \quad &\Leftrightarrow \quad y' - (\cos 2x)y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(e^{-\frac{1}{2}\sin 2x}y\right)' = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad e^{-\frac{1}{2}\sin 2x}y = C \quad \Leftrightarrow \quad y = Ce^{\frac{1}{2}\sin 2x}. \end{aligned}$$

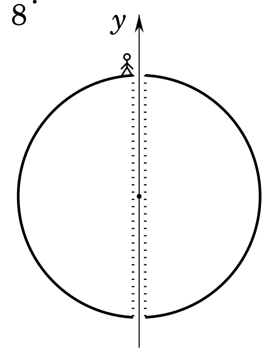
Insättning i ursprungsekvationen ger att $y(0) = -2 + \int_0^0 y(t)\cos 2t\,dt = -2$. För att få ekvivalens i det första steget måste lösningen uppfylla detta villkor, dvs. vi får $y(0) = Ce^0 = C = -2$. Den sökta lösningen är alltså $y(x) = -2e^{\frac{1}{2}\sin 2x}$.

8. Funktionen $f(x) = 1/x^3$, $x > 0$, är strängt avtagande så integraluppskattning ger att

$$\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k^3} \leq \int_2^n \frac{1}{x^3}\,dx = \left[-\tfrac{1}{2}\frac{1}{x^2}\right]_2^n = -\tfrac{1}{2}\frac{1}{n^2} + \frac{1}{8},$$

och det följer att

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k^3} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k^3} \leq \lim_{n\to\infty} \int_2^n \frac{1}{x^3}\,dx = \lim_{n\to\infty} \left(-\tfrac{1}{2}\frac{1}{n^2} + \frac{1}{8}\right) = \frac{1}{8}.$$



9. Placera en y-axel med origo i jordens medelpunkt enligt figur, och låt $y(t)$ vara föremålets y-koordinat i meter vid tiden t sekunder. Newtons kraftekvation ger oss då differentialekvationen

$$my''(t) = -ky(t) \qquad \Leftrightarrow \qquad y''(t) = -\tfrac{k}{m}y(t).$$

Med $y(0) = R$, $y''(0) = -10$ får vi $-10 = y''(0) = -\frac{k}{m}y(0) = -\frac{k}{m}R$, dvs. $k/m = 10/R$. Låt nu $\omega = \sqrt{10/R}$. Vi vill lösa ekvationen $y'' = -\omega^2 y$, dvs.

$$y'' + \omega^2 y = 0,$$

som är en linjär, homogen ekvation av ordning två. Den karakteristiska ekvationen $p(r) = r^2 + \omega^2 = 0$ har rötterna $r_{1,2} = \pm\omega i$ så lösningarna ges av

$$y(t) = C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t$$

för några konstanter C_1, C_2. Villkoren $y(0) = R$, $y'(0) = 0$ ger oss att $y = R\cos\omega t$. Eftersom $t_1 = \pi/2\omega$ anger tidpunkten då föremålet passerar medelpunkten söker vi nu $y'(\pi/2\omega)$. Med $y' = -R\omega\sin\omega t$ gäller det att $y'(\pi/2\omega) = -R\omega = -\sqrt{10R}$. Föremålet passerar således medelpunkten med farten $\sqrt{10R} = \sqrt{64\cdot 10^6} = 8000$ m/s.

10. Vi integrerar klotet över sfäriska "skal". Eftersom arean av en sfär med radie r ges av $4\pi r^2$ ges volymen dV av det sfäriska skalet med radie r och tjocklek dr av $dV = 4\pi r^2\,dr$. I ett sådant skal kan densiteten uppfattas som konstant, $\rho(r) = 1000/\sqrt{r+1}$, så massan av detta skal ges av $dm = \rho(r)\,dV = (4000\pi r^2/\sqrt{r+1})\,dr$. Massan av klotet får vi nu av integralen

$$4000\pi \int_0^1 \frac{r^2}{\sqrt{r+1}}\,dr = \left[\begin{array}{l} t = \sqrt{r+1} \overset{t\geq 1}{\Leftrightarrow} r = t^2 - 1 \\ dr = 2t\,dt \end{array}\right] = 4000\pi \int_1^{\sqrt{2}} \frac{(t^2-1)^2}{t}\cdot 2t\,dt =$$

$$= 8000\pi \int_1^{\sqrt{2}} \left(t^4 - 2t^2 + 1\right)dt = 8000\pi\left[\tfrac{1}{5}t^5 - \tfrac{2}{3}t^3 + t\right]_1^{\sqrt{2}} =$$

$$= 8000\pi\left(\tfrac{4}{5}\sqrt{2} - \tfrac{4}{3}\sqrt{2} + \sqrt{2} - \left(\tfrac{1}{5} - \tfrac{2}{3} + 1\right)\right) = \tfrac{8000\pi}{15}(7\sqrt{2} - 8).$$