LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
ENDIMENSIONELL ANALYS
DELKURS B2/A3
2019–01–12 8–13

Godkäntdel

1. En primitiv funktion ges i de olika fallen av

$$a)\ \ln|x+1|, \quad b)\ \frac{1}{1-x}, \quad c)\ \arctan x, \quad d)\ \frac{1}{2}\ln(1+x^2), \quad e)\ -e^{-x^2/2}, \quad f)\ \arcsin x.$$

2. $e^{ix} = \cos x + i\sin x$.

$$z = \frac{\sqrt{3}+3i}{1+i} = \frac{(\sqrt{3}+3i)(1-i)}{1-i^2} = \frac{\sqrt{3}+3}{2} + \frac{3-\sqrt{3}}{2}i.$$

Vidare är

$$\sqrt{3}+3i = 2\sqrt{3}(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 2\sqrt{3}e^{i\pi/3}$$

och $1+i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$, så

$$z = \frac{2\sqrt{3}e^{i\pi/3}}{\sqrt{2}e^{i\pi/4}} = \sqrt{6}e^{i\pi/12},$$

som är den polära formen.

3. Maclaurin-utvecklingen av ordning 5 för en funktion är

$$f(x) = f(0) + f'(0) + f''(0)x^2/2 + f'''(0)x^3/6 + f^{(4)}(0)x^4/24 + f^{(5)}(0)x^5/120 + R_6(x),$$

där resttermen kan skrivas t.ex. på Lagranges form

$$R_6(x) = f^{(6)}(\theta x)x^6/720, \quad 0 \le \theta \le 1.$$

För $f(x) = \cos(2x)$ har vi

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 0, \quad f''(0) = -2^2, \quad f'''(0) = 0, \quad f^{(4)}(0) = 2^4, \quad f^{(5)}(0) = 0$$

samt $f^{(6)}(x) = -2^6\cos(2x)$. Maclaurinpolynomet är därför

$$1 - 2^4x^2/2 + 2^4x^4/4! = 1 - 2x^2 + 2x^4/3$$

och det följer att (med $0 \le \theta \le 1$)

$$|\cos(2x) - 1 + 2x^2 - \frac{2x^4}{3}| = 2^6|-\cos(2\theta x)|\frac{x^6}{6!} \le \frac{4x^6}{45} \le \frac{x^6}{11}$$

för alla x.

4. Integralen $\int_a^\infty f(x)\,dx$ konvergerar om gränsvärdet

$$\lim_{X\to\infty}\int_a^X f(x)\,dx$$

existerar (ändligt) och integralens värde är då lika med det gränsvärdet. För $f(x)$ gäller partialbråksuppdelningen

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1},$$

så dess primitiv funktioner är

$$\ln|x-2| - \ln|x-1| + C = \ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right| + C.$$

Alltså gäller att

$$\int_3^\infty \frac{1}{(x-1)(x-2)}dx = \lim_{X\to\infty}\left[\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|\right]_3^X = \ln\left|\lim_{X\to\infty}\frac{X-2}{X-1}\right| - \ln\left|\frac{1}{2}\right| = \ln 1 + \ln 2 = \ln 2.$$

Eftersom gränsvärdet existerar (ändligt) är integralen konvergent.

5. Den karakteristiska ekvationen är $r^2 - r - 6 = (r-3)(r+2) = 0$, så den homogena ekvationens lösning är

$$y_h(x) = C_1e^{3x} + C_2e^{-2x}.$$

För att hitta en partikulärlösning kan vi t.ex. ansätta

$$y(x) = Ae^{-x} + Bx + C \;\Rightarrow\; y'(x) = -Ae^{-x} + B, \quad y''(x) = Ae^{-x},$$

så $y'' - y' - 6y =$

$$Ae^{-x} - (-Ae^{-x} + B) - 6(Ae^{-x} + Bx + C) = -4Ae^{-x} - 6Bx - B - 6C.$$

Jämför vi höger- och vänsterled får vi att $-4A = 1, \quad -6B = 1, \quad 6C + B = 0$, d.v.s att $A = -\frac{1}{4}, \quad B = -\frac{1}{6}, \quad C = \frac{1}{36}$. Den allmänna lösningen ges därför av

$$y = -\frac{e^{-x}}{4} - \frac{x}{6} + \frac{1}{36} + C_1e^{3x} + C_2e^{-2x}.$$

6. Volymen ges av integralen

$$\int_1^2 \pi(\sqrt{x}e^{-x})^2\,dx = \pi\int_1^2 xe^{-2x}\,dx = \frac{\pi}{2}([-xe^{-2x}]_1^2 + \int_1^2 e^{-2x}dx) = \frac{\pi}{4}(3e^{-2} - 5e^{-4}).$$

Överbetygsdel

7. Sätt $w = z^3$. För att lösa andragradsekvationen $w^2 - (1+2i)w - 1 + i = 0$ kvadratkompletterar vi:

$$(w - \frac{1+2i}{2})^2 - (\frac{1+2i}{2})^2 - 1 + i = 0,$$

så lösningarna är

$$w = \frac{1+2i}{2} \pm \frac{1}{2} = 1 + i \quad \text{respektive} \quad = i.$$

Återstår att lösa

$$z^3 = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4} \quad \text{och} \quad z^3 = i = e^{i\pi/2}.$$

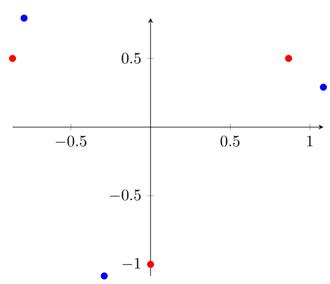
Den första har lösningarna

$$z_k = 2^{1/6}e^{i(\pi/12 + 2k\pi/3)}, \quad k = 0, 1, 2$$

och den andra

$$w_k = e^{i(\pi/6 + 2k\pi/3)}, \quad k = 0, 1, 2.$$

Lösningarna är utritade i figuren till höger.



8. För formuleringen, se boken. För derivatan använder vi att

$$S(x) = \int_1^x \frac{\sin t}{t} dt$$

är en primitiv funktion till $(\sin x)/x$. Enligt insättningsformeln gäller då att

$$f(x) = S(x^2) - S(x)$$

så derivatan blir, enligt kedjeregeln,

$$f'(x) = S'(x^2)(x^2)' - S'(x) = \frac{\sin(x^2)}{x^2} 2x - \frac{\sin(x)}{x} = \frac{1}{x}(2\sin(x^2) - \sin(x)).$$

9. Låt $y(t)$ = antalet ungdomar som använder drogen tid tiden t mätt från den tidpunkt då man upptäckte att drogen är farlig. Då säger texten att följande ekvation ska gälla:

$$y' = 10^{-4} y(3000 - y) - 200, \quad y(0) = 800.$$

För att förenkla lite grand, låt oss räkna antalet ungdom i 1000-tal. Då får ekvationen startvillkoret $y(0) = 0.8$ och

$$y' = 0.1y(3 - y) - 0.2 = 0.1(3y - y^2 - 2) = -0.1(y - 2)(y - 1).$$

Vi kan här börja med att konstatera att om $y(0) < 1$ så är $y' < 0$ och alltså $y(t)$ avtagande (och kommer att gå mot $-\infty$ om vi tillät negativa y).

För att ta reda på när den skär t-axeln separerar vi variablerna. Vi får då att

$$\int \frac{dy}{(y-2)(y-1)} = \int (-0.1) dt$$

och den primitiva funktionen i vänsterledet beräknade vi i uppgift 4. Det följer att

$$\ln |\frac{y-2}{y-1}| = -t/10 + C.$$

För $t = 0$ har vi $y = 0.8$, så

$$C = \ln |\frac{-1.2}{-0.2}| = \ln 6.$$

Sätter vi in $y = 0$ i ekvationen får vi att

$$\ln |\frac{-2}{-1}| = -t/10 + \ln 6 \quad \Leftrightarrow \quad t = 10(\ln 6 - \ln 2) = 10 \ln 3.$$

Så svaret är alltså $10 \ln 3 \approx 11$ månader.

10. Arean fås om vi summerar “areaelement” som består av små cylindrar med tjocklek ds och radie x:

$$dA = 2\pi x \, ds.$$

Vi börjar med att beräkna ds. Med $f(x) = x^2 - \frac{1}{8}\ln(x)$ har vi $f'(x) = 2x - \frac{1}{8x}$, så vi har

$$\sqrt{1 + f'(x)^2} = \sqrt{1 + (2x - \frac{1}{8x})^2} = \sqrt{1 + 4x^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{(8x)^2}} = \sqrt{4x^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{(8x)^2}} = \sqrt{(2x + \frac{1}{8x})^2} = 2x + \frac{1}{8x}.$$

Från det ser vi att

$$dA = 2\pi x \sqrt{1 + f'(x)^2} dx = 2\pi x(2x + \frac{1}{8x}) dx = 2\pi(2x^2 + \frac{1}{8}) dx$$

och alltså blir den totala arean lika med

$$A = \int dA = \int_0^2 2\pi(2x^2 + \frac{1}{8}) dx = 2\pi(\frac{16}{3} + \frac{1}{4}) = \frac{67\pi}{6}.$$