LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

SVAR
ENDIMENSIONELL ANALYS B2/A3
2018-08-27

1. a)

$$z = 2 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) i \qquad \text{eller} \qquad z = 2 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) i.$$

b)

$$2^{27}(1-i).$$

2. a)

$$0.$$

b)

$$\frac{1}{x-1} + \ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right| + C.$$

3. a) Se läroboken.

b) Maclaurins formel för $\sin x$ ger att

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{\cos(\xi)}{5!}x^5,$$

för något tal ξ mellan 0 och x (och $x \in \mathbb{R}$). Substituerar vi $2x$ i stället för x och använder $|\cos(\xi)| \leq 1$ så får vi

$$\left|\sin(2x) - 2x + \frac{1}{6}(2x)^3\right| \leq \frac{|2x|^5}{5!},$$

eller, ekvivalent,

$$\left|\sin(2x) - 2x + \frac{4}{3}x^3\right| \leq \frac{4}{15}|x|^5.$$

4. a)

$$y = x^3 + \frac{1}{x}.$$

b)

$$y = \frac{1}{1 - \arctan(x)}$$

c)

$$y = e^x.$$

5. a) Både $\int_1^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx$ och $\int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx$ är konvergenta, och därmed också $\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx$.

b) Använd funktionen $f(x) = xe^{-x}$ för integraluppskattningen. f har ett lokalt maximum vid $x = 1$, och $f(1) = 1/e$. Funktionen är växande mellan 0 och 1 och avtagande då $x \geq 1$. $f(0) = 0$ och $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Vi har

$$\sum_{k=1}^{\infty} ke^{-k} \geq \int_1^{\infty} xe^{-x}\,dx = \left[-xe^{-x}\right]_1^{\infty} + \int_1^{\infty} e^{-x}\,dx = \frac{1}{e} - \left[e^{-x}\right]_1^{\infty} = \frac{1}{e} + \frac{1}{e} = \frac{2}{e}$$

och

$$\sum_{k=1}^{\infty} ke^{-k} \leq \frac{1}{e} + \int_1^{\infty} xe^{-x}\,dx = \frac{1}{e} + \frac{2}{e} = \frac{3}{e}.$$

6.

$$f(x) = Cx^4$$

där C är en konstant.