LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

LÖSNINGAR
ENDIMENSIONELL ANALYS A3/B2
2018–03–17 kl. 8–13

1. Den allmänna lösningen ges av $y = y_h + y_p$, där y_p är en partikulärlösning, och y_h betecknar samtliga lösningar till motsvarande homogena ekvation. För att bestämma y_h löser vi den karakteristiska ekvationen $p(r) = r^2 - r - 2 = 0 \Leftrightarrow r = 2$ eller $r = -1$. Detta ger $y_h = C_1e^{2x} + C_2e^{-x}$, där C_1 och C_2 är godtyckliga konstanter.

För att bestämma en partikulärlösning y_p ansätter vi $y(x) = z(x)e^{2x}$, och upprepad användning av produktregeln ger

$$y' = (z' + 2z)e^{2x}, \qquad y'' = (z'' + 4z' + 4z)e^{2x}.$$

Insättning i ekvationen leder till

$$\big((z'' + 4z' + 4z) - (z' + 2z) - 2z\big)e^{2x} = 3e^{2x} \qquad \Leftrightarrow \qquad z'' + 3z' = 3,$$

och för att hitta en lösning till denna ansätter vi $z = Ax$ (z-term saknas), vilket ger $z' = A$, $z'' = 0$, och $3A = 3 \Leftrightarrow A = 1$. En partikulärlösning ges alltså av $y_p = xe^{2x}$, och den allmänna lösningen blir således

$$y = y_h + y_p = C_1e^{2x} + C_2e^{-x} + xe^{2x}.$$

Det återstår nu att bestämma konstanterna. Villkoret $y(0) = 0$ ger att $C_1e^0 + C_2e^0 + 0 = 0 \Leftrightarrow C_2 = -C_1$, och vår lösning kan nu skrivas $y = C_1(e^{2x} - e^{-x}) + xe^{2x}$. Derivering ger att

$$y' = C_1(2e^{2x} + e^{-x}) + e^{2x} + 2xe^{2x},$$

och av villkoret $y'(0) = 0$ följer det att $C_1(2e^0 + e^0) + e^0 + 0 = 0 \Leftrightarrow C_1 = -\frac{1}{3}$. Detta innebär att $C_2 = \frac{1}{3}$, så lösningen till begynnelsevärdesproblemet blir slutligen

$$y = \tfrac{1}{3}(e^{-x} - e^{2x}) + xe^{2x}.$$

2. a) Kvadratkomplettering ger

$$z^2 - 4iz - 7 + 4i = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad (\underbrace{z - 2i}_{=w})^2 - (2i)^2 - 7 + 4i = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad w^2 = 3 - 4i,$$

och sätter vi $w = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) får vi

$$a^2 - b^2 + 2abi = 3 - 4i \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ 2ab = -4 \end{cases}.$$

Detta system, som förslagsvis löses genom att utnyttja hjälpekvationen $a^2 + b^2 = |3 - 4i| = 5$, har lösningarna $(a, b) = \pm(2, -1)$. (Observera att systemets andra ekvation ger att a och b har *olika* tecken.) Återgång till z ger slutligen rötterna

$$z_1 - 2i = \underbrace{2 - i}_{=w_1}, \quad z_2 - 2i = \underbrace{-2 + i}_{=w_2} \qquad \Leftrightarrow \qquad z_1 = 2 + i, \quad z_2 = -2 + 3i.$$

b) Derivering av $g(t) = \sqrt{t+1}$ ger oss Maclaurinutvecklingen

$$g(t) = \sqrt{t+1} = 1 + \tfrac{1}{2}t - \tfrac{1}{8}t^2 + B_1(t)t^3,$$

där B_1 är begränsad nära 0. Eftersom $f(x) = \sqrt{x^3+1} = g(x^3)$ följer det att

$$f(x) = \sqrt{x^3+1} = 1 + \tfrac{1}{2}x^3 - \tfrac{1}{8}x^6 + B_1(x^3)x^9 = 1 + \tfrac{1}{2}x^3 - \tfrac{1}{8}x^6 + B_2(x)x^9,$$

där B_2 är begränsad nära 0. Entydighetssatsen för Maclaurinutveckling ger nu att det sökta Maclaurinpolynomet är $p_6(x) = 1 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{8}x^6$.

3. a) Division med x ger att

$$xy' + 2y = e^{x^2} \qquad \Leftrightarrow \qquad y' + \tfrac{2}{x}y = \tfrac{1}{x}e^{x^2},$$

och vi ser då att det rör sig om en första ordningens linjär ekvation på "standardform", som vi kan lösa med integrerande faktor. Med $g(x) = 2/x$ får vi primitiven $G(x) = 2\ln x = \ln(x^2)$, och den integrerande faktorn blir $e^{G(x)} = e^{\ln(x^2)} = x^2$. Multiplikation med denna ger

$$\begin{aligned} x^2y' + 2xy = xe^{x^2} \quad &\Leftrightarrow \quad \tfrac{d}{dx}\big(y\cdot x^2\big) = xe^{x^2} \quad \Leftrightarrow \quad y\cdot x^2 = \int xe^{x^2}\,dx \\ &\Leftrightarrow \quad y\cdot x^2 = \tfrac{1}{2}e^{x^2} + C \quad \Leftrightarrow \quad y = \tfrac{1}{2x^2}e^{x^2} + \tfrac{C}{x^2}. \end{aligned}$$

Den sökta lösningen är alltså $y = \frac{1}{2x^2}e^{x^2} + \frac{C}{x^2}$, där C är en godtycklig konstant.

b) Med $f(x) = \ln x$, vilket ger derivatan $f'(x) = 1/x$, följer det av enpunktsformeln $y - f(1) = f'(1)(x-1)$ att den sökta tangenten har ekvationen $y = x - 1$. Arean ges nu av integralen

$$\begin{aligned} &\int_1^3 (x - 1 - \ln x)\,dx = \int_1^3 (x-1)\,dx - \int_1^3 1\cdot\ln x\,dx = \\ &= \left[\tfrac{1}{2}x^2 - x\right]_1^3 - \left([x\ln x]_1^3 - \int_1^3 x\cdot\frac{1}{x}\,dx\right) = 2 - (3\ln 3 - 2) = 4 - 3\ln 3. \end{aligned}$$

4. a)

$$\begin{aligned} &\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin^3 x + \sin x}\,dx = \left[\begin{array}{ll} t = \sin x, & x = \pi/6 \Rightarrow t = 1/2 \\ dt = \cos x\,dx, & x = \pi/2 \Rightarrow t = 1 \end{array}\right] = \\ &= \int_{1/2}^1 \frac{1}{t^3+t}\,dt = \int_{1/2}^1 \frac{1}{t(t^2+1)}\,dt = \int_{1/2}^1 \left(\frac{1}{t} - \frac{t}{t^2+1}\right)dt = \\ &= \left[\ln t - \tfrac{1}{2}\ln(t^2+1)\right]_{1/2}^1 = \ln 1 - \tfrac{1}{2}\ln 2 - \ln\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\ln\tfrac{5}{4} = \tfrac{1}{2}\ln\tfrac{5}{2}. \end{aligned}$$

b) Analysens huvudsats ger direkt att $S'(x) = \frac{\sin x}{x}$. Eftersom $T(x) = S(x^3)$ följer det sedan av kedjeregeln att

$$T'(x) = S'(x^3)\cdot 3x^2 = \frac{\sin x^3}{x^3}\cdot 3x^2 = \frac{3\sin x^3}{x}.$$

5. a) Funktionen $f(x) = x^3$, $0 \le x \le 2$ har inversen $f^{-1}(y) = y^{1/3}$, $0 \le y \le 8$. Volymen fås nu från formeln för rotationsvolym:

$$V = \pi \int_0^8 (y^{1/3})^2\,dy = \pi\left[\tfrac{3}{5}y^{5/3}\right]_0^8 = \tfrac{3\pi}{5}8^{5/3} = \tfrac{96\pi}{5} \quad \text{(enhet m}^3\text{)}.$$

b) Låt $h(t)$ beteckna vattennivån i meter vid tidpunkten t minuter. Volymen $V(t)$ (enhet m^3) i tanken vid tiden t ges då av

$$V(t) = \pi \int_0^{h(t)} (y^{1/3})^2\,dy = \pi\left[\tfrac{3}{5}y^{5/3}\right]_0^{h(t)} = \tfrac{3\pi}{5}h(t)^{5/3},$$

och kedjeregeln ger att $V'(t) = \pi h(t)^{2/3}h'(t)$. Vid den aktuella tidpunkten t_0 gäller det att $h(t_0) = 3$, $h'(t_0) = 2$, och vi får att

$$V'(t_0) = \pi h(t_0)^{2/3}h'(t_0) = \pi 3^{2/3}\cdot 2.$$

Vattenvolymen ökar alltså med hastigheten $2\pi 3^{2/3}$ m^3/min.

c) Av symmetriskäl gäller det att koordinaterna $x_T = z_T = 0$, så det återstår att bestämma koordinaten y_T med utgångspunkt från den symboliska formeln

$$y_T = \frac{1}{M}\int_K y\,dm,$$

där M betecknar totalmassan. Eftersom innehållet är homogent kan vi utan problem anta att densiteten $\varrho = 1$, och det gäller då att $M = V = \frac{3\pi}{5}8^{5/3}$ (se a-uppgiften). Skär vi nu tunna skivor parallella med xz-planet, med tjocklek dy, får vi massbidragen $dm = dV = \pi y^{2/3}\,dy$, och insättning i formeln ger

$$y_T = \frac{1}{M}\int_K y\,dm = \frac{\pi}{M}\int_0^8 y^{5/3}\,dy = \frac{\pi}{M}\left[\tfrac{3}{8}y^{8/3}\right]_0^8 = \frac{3\pi}{8M}8^{8/3} = \frac{3\pi}{8\cdot\frac{3\pi}{5}8^{5/3}}8^{8/3} = 5.$$

Tyngdpunkten blir alltså $(0,5,0)$.

6. a) Låt $N(t)$ beteckna antalet fiskar i sjön vid tiden t veckor. Denna funktion uppfyller då differentialekvationen $N'(t) = -kN^{1/3}$ för någon positiv konstant k. Ekvationen är separabel, och vi får

$$N' = -kN^{1/3} \quad \underset{N\neq 0}{\Leftrightarrow} \quad N'\cdot\frac{1}{N^{1/3}} = -k$$

$$\Leftrightarrow \quad \int \frac{1}{N^{1/3}}\,dN = \int -k\,dt \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{3}{2}N^{2/3} = -kt + C.$$

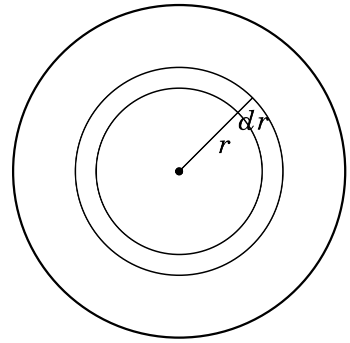
Villkoret $N(0) = 125$ ger oss nu att $\frac{3}{2}125^{2/3} = 0 + C$, dvs. $C = \frac{75}{2}$, och villkoret $N(2) = 64$ att $\frac{3}{2}64^{2/3} = -2k + \frac{75}{2}$, dvs. $k = \frac{27}{4}$. Sätter vi $N = 0$ (egentligen låter vi $N \to 0$, då vi har $N \neq 0$) får vi slutligen

$$0 = -\tfrac{27}{4}t + \tfrac{75}{2} \quad \Leftrightarrow \quad t = \tfrac{50}{9}.$$

Det tar alltså $50/9 \approx 5.6$ veckor för fiskpopulationen att dö ut helt.

b) I figuren betraktas sjön ovanifrån. Låt dA beteckna arean av ett "ringformat element", med tjocklek dr, r meter från mittpunkten (se figuren).

För små värden på dr kan ringen approximeras med en rektangel med sidorna $2\pi r$ (omkretsen) och dr. Vi sätter därför $dA = 2\pi r\,dr$. Vidare kan kemikaliekoncentrationen i denna ring, återigen för små dr, antas vara konstant lika med $\varrho(r) = \frac{1}{100+r^2}$, och massan dm av kemikalien i ringen blir därför



$$dm = \varrho(r) \cdot dA = \frac{1}{100+r^2} \cdot 2\pi r\,dr.$$

Den sökta totalmassan ges nu av integralen

$$\begin{aligned} M &= \int_0^{10} dm = 2\pi \int_0^{10} \frac{r}{100+r^2}\,dr = \\ &= 2\pi \left[\tfrac{1}{2}\ln(100+r^2)\right]_0^{10} = \pi(\ln 200 - \ln 100) = \pi \ln 2 \quad \text{(enhet kg).} \end{aligned}$$