LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

LÖSNINGSFÖRSLAG
ENDIMENSIONELL ANALYS
DELKURS B2/A3
2018–01–13

1. Svar:

a) $x - \ln|x+1|$ b) $\ln\left|\dfrac{x}{x+1}\right|$ c) $\arctan x$ d) $\dfrac{1}{2}e^{x^2}$ e) $(x-1)e^x$.

2. a) Det karakteristiska polynomet är $r^2-4 = (r-2)(r+2)$, så den allmänna homogena lösningen är $y_h(x) = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x}$. För en partikulärlösning ansätter vi $y_p(x) = Ae^{3x} + B$ och får då att A, B ska väljas så att

$$9Ae^{3x} - 4(Ae^{3x} + B) = e^{3x} + 4 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 5A = 1 \\ -4B = 4 \end{cases}.$$

En partikulärlösning är alltså $y_p(x) = \frac{e^{3x}}{5} - 1$ och den allmänna lösningen därför

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x) = \frac{e^{3x}}{5} - 1 + C_1e^{2x} + C_2e^{-2x}.$$

b) Vi börjar med att beräkna integralen mellan 1 och ett stort tal X. Sätt $t = e^x$. Då är $x = \ln t$ och alltså $dx = dt/t$. Vidare avbildas $x = 0$ på $t = 1$ och $x = X$ på $t = e^X$. Integralen blir därför

$$\int_1^{e^X} \frac{t}{t^2+8t+15}\frac{dt}{t} = \int_1^{e^X} \frac{dt}{t^2+8t+15} = \int_1^{e^X} \frac{dt}{(t+3)(t+5)}.$$

Om vi nu partialbråksuppdelar integranden får vi

$$\frac{1}{(t+3)(t+5)} = \frac{1/2}{t+3} - \frac{1/2}{t+5}$$

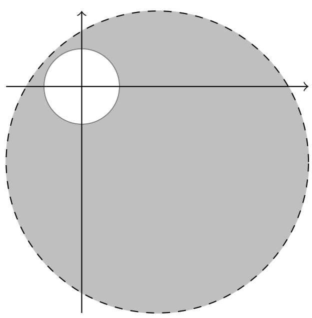
vilket betyder att integralen är lika med

$$\frac{1}{2}\left[\ln(t+3) - \ln(t+5)\right]_1^{e^X} = \frac{1}{2}\Big((\ln(e^X+3) - \ln 4) - (\ln(e^X+5) - \ln 6)\Big) = \frac{1}{2}\ln\frac{3(e^X+3)}{2(e^X+5)}.$$

När $X \to +\infty$ gäller att $(e^X+3)/e^X+5) \to 1$ vi får alltså att

$$\int_0^{\infty} \frac{e^x}{e^{2x}+8e^x+15}dx = \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}.$$

3. a) Randen på den mindre cirkeln ingår men inte randen på den större.



b) Talet är

$$e^{i\pi/6}z = (\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})(4+3i) = (\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2})(4+3i) = 2\sqrt{3} - \frac{3}{2} + i(\frac{3\sqrt{3}}{2} + 2).$$

4. a) Se läroboken

b) Inför

$$S(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}},$$

som enligt analysens huvudsats har derivatan $S'(x) = 1/\sqrt{1-x^4}$. Vidare är $f(x) = S(\sqrt{x})$, så kedjeregeln ger att

$$f'(x) = S'(\sqrt{x})\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x(1-x^2)}}.$$

5. a) Sätt $f(x) = (1+x)^a$. Då gäller att

$$f'(x) = a(1+x)^{a-1}, \quad f''(x) = a(a-1)(1+x)^{a-2}, \quad f'''(x) = a(a-1)(a-2)(1+x)^{a-3},$$

och alltså $f(0) = 1, \quad f'(0) = a, \quad f''(0) = a(a-1)$. Maclaurinpolynomet blir därför

$$p_2(x) = 1 + ax + \frac{a(a-1)x^2}{2}$$

medan resttermen är

$$R_3(x) = f'''(\theta(x)x)\frac{x^3}{3!} = \frac{a(a-1)(a-2)}{6}(1+\theta(x)x)^{a-3}x^3,$$

där $\theta(x)$ ligger mellan 0 och 1. Maclaurinutvecklingen är summan av dessa:

$$(1+x)^a = p_2(x) + R_3(x).$$

b) Vi använder a) med $a = 2/3$ men ersätter x med x^3. Det ger att

$$(1+x^3)^{2/3} = 1 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{9}x^6 + \frac{8}{6\cdot 27}(1+\theta(x^3)x^3)^{-7/3}x^9$$

Om vi därför tar $p_6(x) = 1 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{9}x^6$ så får vi att, då $x \geq 0$,

$$|(1+x^3)^{2/3} - p_6(x)| = \frac{4}{81}(1+\theta(x^3)x^3)^{-7/3}x^9 \leq \frac{x^9}{20},$$

där vi använt att $(1+\theta(x^3)x^3)^{7/3} \geq 1$ då $x \geq 0$ och att $81 > 80$.

c) Enligt formeln för rotationsvolymer vid rotation runt x-axeln ges volymen av integralen

$$V = \int_0^1 \pi y^2 dx = \pi \int_0^1 (1+x^3)^{2/3} dx.$$

Här kan vi uppskatta integralen med polynomet $p_6(x)$ i b):

$$\int_0^1 p_6(x)dx = \left[x + \frac{2}{12}x^4 - \frac{1}{63}x^7\right]_0^1 = 1 + \frac{1}{6} - \frac{1}{63} = 145/126(\approx 1.15).$$

Det totala felet kan enligt b) uppskattas med

$$\pi \int_0^1 \frac{x^9 dx}{20} = \pi \left[\frac{x^{10}}{200}\right]_0^1 = \frac{\pi}{200} < \frac{4}{200} = 0.02.$$

Svar: Det sökta närmevärdet är $\frac{145\pi}{126}$(≈ 3.61).

6. Om $N(t)$ är antalet infekterade vid tiden t och N är antalet individer i befolkningsgruppen, så säger modellen att

$$N'(t) = r_1 N(t)(N - N(t))$$

för någon positiv konstant r_1. Vi väljer att reducera antalet parametrar (r_1 och N) genom att istället betrakta $y(t) = N(t)/N$ som uppfyller ekvationen

$$y'(t) = ry(t)(1 - y(t)),$$

där $r = r_1 N$. Starvillkoret är då att $y(0) = 1/2$ och vid den tidpunkten är spridningshastigheten $y'(0) = ry(0)(1 - y(0)) = r/4$. Om smittspridningen fortsätter med den hastigheten så är tiden t tills hela befolkningen är smittad lösningen på ekvationen $rt/4 = 1/2$. Eftersom vi vet att $t = 24$ följer att $r = 1/12$.

Det återstår att lösa ekvationen. Det är en separabel differentialekvation (y ligger mellan 0.5 och 1):

$$\int \frac{dy}{y(1-y)} = \int r\,dt \quad \Leftrightarrow \quad \int (\frac{1}{y} + \frac{1}{1-y})dy = rt + C \quad \Leftrightarrow \quad \ln \frac{y}{1-y} = rt + C.$$

Vi vet att $y(0) = 1/2$, så konstanten ges av $C = \ln 1 = 0$. Ekvationen är nu ekvivalent med att

$$\frac{y}{1-y} = e^{rt} \quad \Leftrightarrow \quad y = e^{rt}(1-y) \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{e^{rt}}{e^{rt}+1} = \frac{1}{1+e^{-rt}}.$$

Sätter vi för $t = 24$ in att vi vet att $r = 1/12$, så får vi att

$$\frac{N(24)}{N} = y(24) = \frac{1}{1+e^{-2}},$$

vilket alltså är svaret.