LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

Svar och anvisningar
ENDIMENSIONELL ANALYS B2/A3
2017–08–21 8–13

1. a) $3e^{i\pi/3}(1+i) = \frac{3(1-\sqrt{3})}{2} + \frac{3(1+\sqrt{3})}{2}i$

b) i och $(1+i)$.

2. a) $1/2$.

b) $\ln \dfrac{e^x+2}{e^x+3} + C$

c) $f(x) = e^{-2x} \arctan x + Ce^{-2x}$.

3. a) $y = Ae^x + Be^{2x} + \dfrac{1}{10}\sin x + \dfrac{3}{10}\cos x$.

b) Om du vill beräkna volymen av en kropp kan du skära den i tunna skivor och beräkna varje skivas volym som arean $A(x)$ gånger tjockleken dx för att sedan summera dessa. Då skivorna blir oändligt tunna övergår summan i integralen.

4. a) $12 \cdot 10^5$.

b) $\frac{2}{3}(2^{3/2} - 1)$.

5. a) Vi har att $y = x^2$ betyder att $x(y) = \sqrt{y}$, så resultatet ur formeln för rotationsvolym.

b) Differentialevkationen är $V'(t) = -k\sqrt{h(t)}$ där $V(t) = \pi h(t)^2/2$, vilket ger $\pi h(t)h'(t) = -k\sqrt{h}$. Löses (notera att $V'(0) = -0.01$ m^3/timme) till

$$h(t)^{3/2} = 1 - 3t/200\pi.$$

Behållaren är alltså tom efter $200\pi/3 \approx 209$ timmar.

c) Tvärsnittsarean när behållaren är halvfull är $S = \pi/2$ m^2, så om det regnar a mm/h så finns ett tillflöde på $a\pi/2 \cdot 10^{-3}$ mm^3/h. Detta ska balanseras (ty $aS - k\sqrt{h} = V' = 0$) av $k\sqrt{1/2}$, så vi får att

$$a = \frac{2 \cdot 10^3 k}{\pi\sqrt{2}} = \frac{10\sqrt{2}}{\pi} \approx 5 \text{ mm/h}.$$

6. Integralekvationen är ekvivalent med differentialekvationsproblemet

$$y' = 1 + \sin y, \quad y(0) = 0.$$

a) Ur ekvationen får vi att $y'(0) = 1$. Deriverar vi ekvationen fler gånger får vi fler derivator i origo. Det sökta polynomet är

$$p(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}.$$

b) Differentialekvationen är separabel: $y'/(1+\sin y) = 1$. Förlänger vi med $1 - \sin y$ i vänsterledet får vi

$$\int \frac{(1-\sin y)dy}{\cos^2 y} = x + C \quad \Rightarrow \quad \tan y - \frac{1}{\cos y} = x + C.$$

Eftersom $y(0) = 0$ får vi att $C = -1$ och $x = \tan y - \frac{1}{\cos y} + 1 = -\frac{\cos y}{1+\sin y} + 1$. Den inversa funktionen är alltså

$$y^{-1}(x) = -\frac{\cos x}{1+\sin x} + 1.$$

Alternativ kan vi lösa integralen genom att sätta $t = \tan(y/2)$. Då får man istället

$$x = 2 - \frac{2}{1+\tan(y/2)} = \frac{2\sin(y/2)}{\sin(y/2)+\cos(y/2)},$$

som ger ett annat (ekvivalent) uttryck för inversen.

c) Enklast ses det direkt ur differentialekvationen, eftersom högerledets första positiva nollställe är $y = 3\pi/2$ och $y' > 0$ så länge $0 \leq y \leq 3\pi/2$. Man kan också se det ur uttrycken för inversen genom att se efter för vilka y vi får $x = \infty$. Med det andra uttrycket ovan har vi t.ex. villkoret att $\sin(y/2) + \cos(y/2) = 0$ och första positiva lösningen på den är att $y = 3\pi/2$. I det första uttrycket är $y = 3\pi/2$ nollställe till $1 + \sin y$.