LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

SVAR OCH ANVISNINGAR
ENDIMENSIONELL ANALYS
DELKURS A3/B2
2017–06–08 kl 8–13

1. a) Se boken, Definition 12.1, sid 279.

b) Svar: $y(x) = (2x-3)e^{2x} + 2x^2 + 4x + 3$.

2. a) Polynomdividera med $(x-(1+i))(x-(1-i)) = (x-1)^2 + 1 = x^2 - 2x + 2$. Svar: $p(x) = (x^2 - 2x + 2)(3x + 2)$.

b) Sätt $w = z + i$ och lös den binomiska ekvationen $w^4 = 8(i\sqrt{3} - 1)$ på polär form. Svar: $z_1 = \sqrt{3}$, $z_2 = -\sqrt{3} - 2i$, $z_3 = -1 + (\sqrt{3} - 1)i$, $z_4 = 1 - (\sqrt{3} + 1)i$.

3. a) Byt $t = \sin x$. Svar: $\sin x - 2\ln(2 + \sin x) + C$.

b) Byt $t = \sqrt{x+1}$. Svar: $\displaystyle\int_1^2 2(t^2 - 1)\,dt = \frac{8}{3}$.

c) Polynomdividera, partialbråksuppdela, integrera:

$$\int_{-1}^{1} \left(1 - \frac{x}{x^2+3} - \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}\right) dx = \left[x - \frac{1}{2}\ln(x^2+3) - \sqrt{3}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)\right]_{-1}^{1} = 2 - \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

4. a) Se boken, sid 286–289.

b) Tyngdpunkten ligger i $\left(\dfrac{4+9\pi}{6+3\pi}, 0\right)$. OBS symmetri på y-axeln.

5. Låt $y(t)$ vara antal cfu/l i tanken t timmar efter filtreringen påbörjats. Så har vi

$$y'(t) = 0.1 - y(t)\frac{5}{100}, \quad y(0) = 0.1 \cdot 500 = 50.$$

Vi löser den med integrerande faktor IF$=e^{0.05t}$ och får $y(t) = 2 + 48e^{-0.05t}$. Slutligen $y(t) = 10$ ger $t = 20\ln 6 \approx 36$ timmar.

6. a) Eftersom

$$\begin{aligned}(\sin x)^2 &= \left(x - \frac{x^3}{3!} + \dots\right)\left(x - \frac{x^3}{3!} + \dots\right) = x^2 - \frac{x^4}{3} + B_1(x)x^6,\\ \sin(x^2) &= x^2 + B_2(x)x^6\end{aligned}$$

så har vi att $(\sin x)^2 - \sin(x^2) = -\frac{x^4}{3} + B(x)x^6$, således, gränsvärdet existerar ändligt för $p \le 4$. Nämligen,

$$\lim = \begin{cases} 0 & \text{om } p < 4, \\ -1/3 & \text{om } p = 4. \end{cases}$$

b) Funktionen $f(x) = a^{\sqrt{x}}$ är positiv och avtagande på intervallet $x > 0$ för alla $0 < a < 1$. Jämförelse med integralen ger

$$\sum_{k=1}^{\infty} a^{\sqrt{k}} \le \int_0^{\infty} a^{\sqrt{x}}\,dx = [t = \sqrt{x}] = \int_0^{\infty} 2ta^t\,dt = [\text{partialint.}] = \frac{2}{(\ln a)^2} < +\infty.$$

(Vid integrationen används omskrivning $a^t = e^{t\ln a}$.)