LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
ENDIMENSIONELL ANALYS B2/A3
SVAR 2017–04–19

INGA HJÄLPMEDEL. Lösningarna ska vara försedda med ordentliga motiveringar.

1. a) $\int_0^\infty e^{-\sqrt{x}}\,dx = \int_0^\infty 2ye^{-y}\,dy = \lim_{A\to\infty}[-2ye^{-y}]_0^A + \lim_{A\to\infty} 2\int_0^A e^{-y}\,dy = 2.$

b) $\frac{x+2}{x^2-2x-3} = \frac{1}{4}(\frac{5}{x-3} - \frac{1}{x+1})$. Integralen blir $[\frac{1}{4}(5\ln|x-3| - \ln|x+1|)]_0^1 = \ln 2 - \frac{5}{4}\ln 3$.

2. a) Kvadratkomplettering ger $(z+2)^2 = 4+3i$. Låt $z+2 = w = a+bi$. Då kan ekvationen skrivas om till

$$\begin{aligned} a^2-b^2 &= 4 \\ 2ab &= 3 \\ a^2+b^2 &= 5 \end{aligned}$$

med lösningar $z_1 = -2+\frac{\sqrt{2}}{2}(3+i)$ samt $z_2 = -2-\frac{\sqrt{2}}{2}(3+i)$.

b) Låt $z = a+ib$. Därmed är

$$Re(z-\frac{1}{z}) = Re((a+ib) - \frac{a-ib}{a^2+b^2}) = a(1-\frac{1}{a^2+b^2}) = 0$$

med lösningen $a=0, b\neq 0$ (dvs hela den imaginära linjen UTOM origo eftersom uttrycket inte är definierad för $z=0$) samt $a^2+b^2=1$, dvs enhetscirkeln.

3. a) Teorifråga

b) Det finns många plynom som kan tänkas klara kraven, men uppgiften erbjuder att testa med Maclaurinspolynom av grad 4. Man har i så fall

$$p_4(x) = 1+x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}.$$

Felet, uppskattad via resttermen i MacLaurinutveckling, blir

$$|\cos x+\sin x - p_4(x)| = R_5(x) = (\cos\zeta - \sin\zeta)\frac{x^5}{120},$$

för något $0\le\zeta\le\frac{1}{2}$. Eftersom $|\cos\zeta-\sin\zeta|\le 1$ i första kvadranten, har vi

$$|R_5(x)| \le \frac{1}{2^5\cdot 120} < 0.001$$

4. a) Teorifråga

b) Ur grafen har man att

$$A(x) = \ln(1+x^2) = \int_0^x f(t)\,dt$$

Analysens huvudsats säger att $f(x) = A'(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$.

c) Serien kan stängas in enligt

$$\int_2^\infty \frac{\ln t}{t^2}\,dt \le \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\ln k}{k^2} \le \frac{\ln 2}{4} + \int_2^\infty \frac{\ln t}{t^2}\,dt.$$

Därefter konstateras att serien är konvergent eftersom den generaliserade integralen

$$\int_2^\infty \frac{\ln t}{t^2}\,dt = \left[-\frac{1+\ln t}{t}\right]_2^\infty = \frac{1+\ln 2}{2}$$

är konvergent.

5. a) Rotationsvolym, enligt formel:

$$V = \int_0^1 \pi y^2(x)\,dx = \pi a^2 \int_0^1 x^6\,dx = \frac{\pi a^2}{7}.$$

b) Rotationsvolym. Observera: kring y-axeln!

$$V = \int_0^a \pi x^2(y)\,dy = \int_0^a \pi (y/a)^{2/3}\,dy = \int_0^1 2\pi x(a - ax^3)\,dx = \frac{3}{5}\pi a.$$

6. a) Enligt Newtons avsvalningslag, $T'(t) = -k(T(t) - T_{rum})$. Låt T_0 beskriva tankens temperatur vid $t = 0$. Därmed:

$$T'(t) + kT(t) = kT_{rum}, \qquad T(0) = T_0 = 660^o C, \quad T_{rum} = 20^o C$$

b) Med t ex integrerande faktormetoden fås $T(t) = T_{rum} + (T_0 - T_{rum})e^{-kt}$. Eftersom $T(1) = 340^o C = T_{rum} + (T_0 - T_{rum})e^{-k}$ fås $e^{-k} = 1/2$ och $k = \ln 2$. Efter 3 timmar blir $T(3) = T_{rum} + (T_0 - T_{rum})e^{-k3} = (20 + 640/8)^o C = 100^o C$, dvs att tanken är utom fara på precis 3 timmar. Uppdraget är avklarad.

c) För tank nr 2 och fallet luft har man en annan konstant k_l.
Eftersom $T_2(1) = 500^o C = T_{rum} + (T_0 - T_{rum})e^{-k_l}$ fås $e^{-k_l} = 3/4$ och $k_l = \ln(4/3)$. Efter 3 timmar är $T_2(3) = (20 + 640(3/4)^3)^o C = 290^o C$. Efter ytterligare en timme, nu med nedkylning under vatten, blir det:
$T_2(3+1) = (20 + (290 - 20)(1/2))^o C = 155^o C$. Brandkåren klarar inte tank nr 2.

LYCKA TILL!