**LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA**
**MATEMATIK**

**LÖSNINGAR**
**ENDIMENSIONELL ANALYS A3/B2**
**2017–03–18 kl 8–13**

**1. a)**

$$\int \frac{1}{x^2-9}\,dx \overset{\text{p.bråksuppd.}}{=} \tfrac{1}{6}\int \left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+3}\right)dx =$$

$$= \tfrac{1}{6}\big(\ln|x-3|-\ln|x+3|\big)+C = \tfrac{1}{6}\ln\left|\tfrac{x-3}{x+3}\right|+C,$$

så en primitiv funktion ges av $F(x)=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|$.

**b)** Vi multiplicerar ekvationen med den integrerande faktorn $e^{-\ln x}=\frac{1}{x}$, och får

$$\frac{1}{x}y'-\frac{1}{x^2}y=\frac{x}{x^2+1} \quad\Leftrightarrow\quad \tfrac{d}{dx}\left(y\cdot\frac{1}{x}\right)=\frac{x}{x^2+1}$$

$$\Leftrightarrow\quad y\cdot\frac{1}{x}=\tfrac{1}{2}\ln(x^2+1)+C \quad\Leftrightarrow\quad y=\tfrac{1}{2}x\ln(x^2+1)+Cx.$$

**2. a)** Maclaurins formel tillämpad på $f(x)=\ln(x+1)$ ger

$$f(x)=\underbrace{x-\tfrac{1}{2}x^2}_{=p_2(x)}+\frac{1}{3(1+\theta x)^3}x^3, \qquad 0\le\theta\le 1.$$

Eftersom $\theta x\ge 0$ följer det att

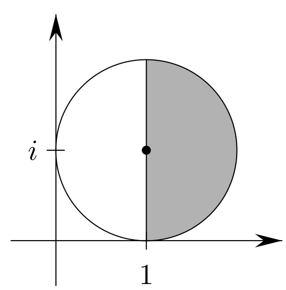
$$|f(x)-p_2(x)|=\frac{1}{3(1+\theta x)^3}x^3\le\frac{1}{3(1+0)^3}x^3=\tfrac{1}{3}x^3.$$

Approximationen $\ln(1.2)=f(0.2)\approx p_2(0.2)=0.2-\frac{1}{2}(0.2)^2=0.18$ ger ett närmevärde med ett fel som är högst

$$\tfrac{1}{3}(0.2)^3=\frac{1}{375}=\tfrac{8}{3}\cdot 10^{-3},$$

vilket är mindre än det önskade $5\cdot 10^{-3}$.

**b)** De sökta komplexa talen svarar mot den skuggade cirkelsektorn i figuren (inklusive rand).



**3. a)** Samtliga lösningar till den linjära ekvationen

$$y'' + 16y = 2\cos 3t$$

ges av summan $y = y_h + y_p$, där $y_p$ är en partikulärlösning till ekvationen och $y_h$ betecknar samtliga lösningar till motsvarande homogena ekvation.

Den karakteristiska ekvationen $p(r) = r^2 + 16$ har nollställena $r_{1,2} = \pm 4i$, vilket ger

$$y_h = A\cos 4t + B\sin 4t,$$

där $A$ och $B$ är godtyckliga konstanter. För att bestämma en partikulärlösning söker vi i stället en lösning till hjälpekvationen

$$y'' + 16y = 2e^{i3t},$$

vars högerled har en realdel lika med $2\cos 3t$. Vi ansätter en lösning $y(t) = z(t)e^{i3t}$, och med $y' = (z' + 3iz)e^{i3t}$ och $y'' = (z'' + 6iz' - 9z)e^{i3t}$ kan hjälpekvationen skrivas

$$e^{i3t}\big(\,(z'' + 6iz' - 9z) + 16z\,\big) = 2e^{i3t} \qquad \Leftrightarrow \qquad z'' + 6iz' + 7z = 2.$$

Denna ekvation löses av den konstanta funktionen $z = 2/7$, vilket ger oss följande lösning till hjälpekvationen:

$$z = \tfrac{2}{7}e^{i3t} = \tfrac{2}{7}(\cos 3t + i\sin 3t) = \tfrac{2}{7}\cos 3t + i\tfrac{2}{7}\sin 3t. \tag{1}$$

En partikulärlösning $y_p$ ges nu av realdelen av (1), dvs. $y_p = \frac{2}{7}\cos 3t$.

Samtliga lösningar till differentialekvationen ges alltså av

$$y = y_h + y_p = A\cos 4t + B\sin 4t + \tfrac{2}{7}\cos 3t.$$

**b)** För att resonans ska uppstå måste den nya ekvationens högerled ha samma vinkelfrekvens som lösningen till den homogena ekvationen, dvs. vi måste sätta $k = 4$.

Det som blir annorlunda jämfört med räkningarna i a) är bestämningen av partikulärlösningen. Vi får nu i stället hjälpekvationen

$$y'' + 16y = 2e^{i4t},$$

vilket med ansättningen $y(t) = z(t)e^{i4t}$ ger oss ekvationen

$$e^{i3t}\big(\,(z'' + 8iz' - 16z) + 16z\,\big) = 2e^{i3t} \qquad \Leftrightarrow \qquad z'' + 8iz' = 2.$$

Här måste vi (eftersom $z$-termen saknas) ansätta en lösning på formen $z = At$. Insättning ger att $A = \frac{1}{4i} = -\frac{1}{4}i$, vilket ger följande lösning till hjälpekvationen:

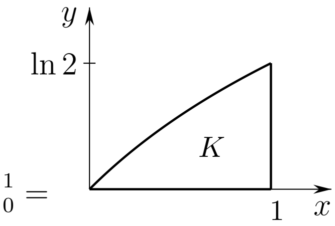
$$z = -\tfrac{t}{4}ie^{i4t} = -\tfrac{t}{4}i(\cos 4t + i\sin 4t) = \tfrac{t}{4}\sin 4t + i\big(-\tfrac{t}{4}\cos 4t\big).$$

Vi plockar återigen ut realdelen, och får $y_p = \frac{t}{4}\sin 4t$.

Samtliga lösningar till vår nya differentialekvation ges alltså av

$$y = y_h + y_p = A\cos 4t + B\sin 4t + \tfrac{t}{4}\sin 4t.$$

**4. a)** Arean beräknar vi med hjälp av partialintegration:




$$A = \int_0^1 \ln(x+1)\,dx = \left[\,x\ln(x+1)\,\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{x+1}\,dx =$$

$$\overset{\text{pol.div.}}{=} \ln 2 - \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)dx = \ln 2 - \left[\,x - \ln(x+1)\,\right]_0^1 =$$

$$= \ln 2 - (1 - \ln 2) = 2\ln 2 - 1.$$

**b)** Eftersom skivan är homogen så kan vi anta att densiteten $\rho = 1$, vilket innebär att massan $m = A = 2\ln 2 - 1$.

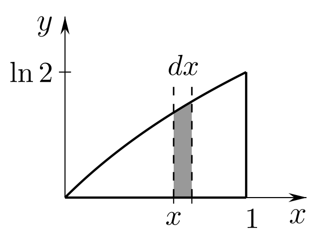
Vi börjar med att beräkna $x$-koordinaten $x_T$: Om $dm$ betecknar massan av remsan i den vänstra figuren nedan, så är $dm = \ln(x+1)\,dx$ och vi får

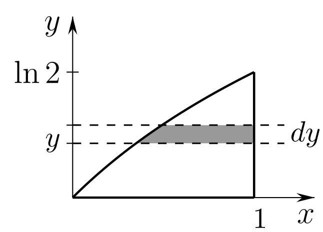
$$\int_K x\,dm = \int_0^1 x\ln(x+1)\,dx = \left[\,\tfrac{1}{2}x^2\ln(x+1)\,\right]_0^1 - \tfrac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,dx =$$

$$\overset{\text{pol.div.}}{=} \tfrac{1}{2}\ln 2 - \tfrac{1}{2}\int_0^1 \left(x - 1 + \frac{1}{x+1}\right)dx =$$

$$= \tfrac{1}{2}\ln 2 - \tfrac{1}{2}\left[\,\tfrac{1}{2}x^2 - x + \ln(x+1)\,\right]_0^1 = \tfrac{1}{2}\ln 2 - \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2} - 1 + \ln 2\right) = \tfrac{1}{4}.$$

Detta ger $x_T = \frac{1}{m}\int_K x\,dm = \frac{1}{8\ln 2 - 4}$.




Låt $f$ vara funktionen $f(x) = \ln(x+1)$, $0 \le x \le 1$. För att beräkna $y$-koordinaten $y_T$ behöver vi då inversen $f^{-1}(y) = e^y - 1$, $0 \le y \le \ln 2$. Nu blir i stället massan av remsan (figuren ovan till höger) $dm = (1 - (e^y - 1))\,dy = (2 - e^y)\,dy$, och vi får

$$\int_K y\,dm = \int_0^{\ln 2} (2y - ye^y)\,dy = \left[\,y^2\,\right]_0^{\ln 2} - \left(\left[\,ye^y\,\right]_0^{\ln 2} - \int_0^{\ln 2} e^y\,dy\right) =$$

$$= (\ln 2)^2 - \left(2\ln 2 - \left[\,e^y\,\right]_0^{\ln 2}\right) = (\ln 2)^2 - 2\ln 2 + 1 = ((\ln 2) - 1)^2.$$

Detta ger $y_T = \frac{1}{m}\int_K y\,dm = \frac{((\ln 2)-1)^2}{2\ln 2 - 1}$.

Tyngdpunkten för $K$ har alltså koordinaterna $\left(\frac{1}{8\ln 2 - 4}, \frac{((\ln 2)-1)^2}{2\ln 2 - 1}\right)$.

**5. a)** Se läroboken sid. 315–316.

**b)** Detta är i grunden ett optimeringsproblem. Med hjälp av analysens huvudsats (i kombination med kedjeregeln) får vi

$$g'(x) = \tfrac{1}{8}e^x - e^{(\sqrt{x})^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{e^x}{8\sqrt{x}}(\sqrt{x}-4),$$

| $x$ | 0 | | 16 | |
|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ |
| $g(x)$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ |

med den enda stationära punkten $x = 16$. Eftersom $\frac{e^x}{8\sqrt{x}}$ är positiv och faktorn $\sqrt{x}-4$ övergår från att vara negativ till att vara positiv i den stationära punkten, måste $x = 16$ vara en global minimipunkt (se teckentabell). Funktionen antar alltså sitt minsta värde i $x = 16$.

**6. a)** Låt oss först betrakta en tunn skiva av tankinnehållet, med tjocklek $dy$, belägen $y$ meter över bottenytan. Denna skiva har radien $x = \sqrt{y+1}$, och således massan $dm = \frac{2}{\sqrt{y}+1} \cdot \pi(\sqrt{y+1})^2\,dy = 2\pi\frac{y+1}{\sqrt{y}+1}\,dy$. Totalmassan kan vi sedan beräkna genom integrationen

$$m = \int_K dm = 2\pi\int_0^1 \frac{y+1}{\sqrt{y}+1}\,dy = \begin{bmatrix} t=\sqrt{y} \Rightarrow y=t^2 \\ dy = 2tdt \end{bmatrix} =$$

$$= 4\pi\int_0^1 \frac{t^3+t}{t+1}\,dt \overset{\text{pol.div.}}{=} 4\pi\int_0^1 \left(t^2 - t + 2 - \frac{2}{t+1}\right)dt =$$

$$= 4\pi\left[\,\tfrac{1}{3}t^3 - \tfrac{1}{2}t^2 + 2t - 2\ln(t+1)\,\right]_0^1 = \tfrac{22}{3}\pi - 8\pi\ln 2.$$

Materialet i tanken väger alltså $\frac{22}{3}\pi - 8\pi\ln 2 \approx 5.6$ ton.

**b)** Om $y(t)$ betecknar vätskenivån i meter vid tidpunkten $t$ minuter, så ger Torricellis lag, eftersom $A(y) = \pi(\sqrt{y+1})^2 = \pi(y+1)$, differentialekvationen

$$y' = -k\frac{\sqrt{y}}{y+1}$$

där $k$ är en positiv konstant (vi har här "bakat in" $\pi$ i konstanten $k$). Detta är en separabel ekvation, och för $y > 0$ får vi

$$y' \cdot \frac{y+1}{\sqrt{y}} = -k \qquad \Leftrightarrow \qquad y' \cdot \left(\sqrt{y} + \frac{1}{\sqrt{y}}\right) = -k$$

$$\Leftrightarrow \qquad \int\left(\sqrt{y} + \frac{1}{\sqrt{y}}\right)dy = \int -k\,dt \qquad \Leftrightarrow \qquad \tfrac{2}{3}y^{3/2} + 2\sqrt{y} = -kt + C,$$

där $C$ är en konstant.

Sätter vi $y(0) = 1$ får vi $C = \frac{2}{3} + 2 = \frac{8}{3}$, och insättning av $y(2) = 1/4$ ger $C - 2k = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{8} + 2\cdot\frac{1}{2}$ vilket ger $k = 19/24$. Vår (implicita) lösning blir således

$$\tfrac{2}{3}y^{3/2} + 2\sqrt{y} = -\tfrac{19}{24}t + \tfrac{8}{3}.$$

Vi ser nu att $y \to 0$ svarar mot att $t \to \frac{8}{3}\cdot\frac{24}{19} = \frac{64}{19}$. Det tar alltså ytterligare $\frac{64}{19} - 2 = \frac{26}{19} \approx 1.37$ minuter att tömma tanken helt.