LÖSNINGSFÖRSLAG | **ENDIMENSIONELL ANALYS**
LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA | **B2 (FMAA05)/A3 (FMAA01)**
MATEMATIK | **2017–01–14 kl. 08–13**

1. a) Differentialekvationen är linjär och av andra ordningen. Den tillhörande homogena differentialekvationen $y'' - y = 0$ löser vi genom att observera att den karakteristiska ekvationen $\lambda^2 - 1 = 0$ har lösningarna $\lambda = \pm 1$. Det följer att $y_h(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$ är den allmänna lösningen till den homogena differentialekvationen. För att bestämma en partikulärlösning noterar vi att högerledet e^{-2x} ej löser den homogena differentialekvationen. Ansättningen $y_p(x) = Ae^{-2x}$ skall därmed fungera. Vi deriverar ett par gånger och får $y_p'(x) = -2Ae^{-2x}$ och $y_p''(x) = 4Ae^{-2x}$. Insättning ger nu

$$e^{-2x} = y_p''(x) - y_p(x) = 4Ae^{-2x} - Ae^{-2x} = 3Ae^{-2x}$$

vilket stämmer precis då $A = 1/3$. Alltså duger $y_p(x) = (1/3)e^{-2x}$ som partikulärlösning. Den allmänna lösningen till vår differentialekvation fås nu som summan av y_h och y_p, dvs

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \frac{1}{3} e^{-2x}.$$

b) Differentialekvationen är separabel, och eftersom $y(0) \neq 0$ kan vi dela med $(y(x))^3$, åtminstone för små x. Vi integrerar och får

$$\int \frac{1}{(y(x))^3} y'(x)\, dx = \int 1\, dx \quad \text{dvs} \quad -\frac{1}{2(y(x))^2} = x + C$$

Nu ger $y(0) = 1$ att $C = -1/2$, och vi kan lösa ut y och får (villkoret $y(0) = 1$ tvingar oss att välja den positiva roten)

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2x}}.$$

(Lösningen är endast definierad för $x < 1/2$.)

2. a) Kvadratkomplettering ger $(z + (1 - i))^2 = i2$. Den vanliga lösningsvägen att låta $w = z + (1 - i)$ och sedan skriva $w = a + ib$ fungerar (se exempel 6.12 och 6.13 i kursboken), men vi ser en genväg. Eftersom $(1 + i)^2 = i2$ så får vi att $z + (1 - i) = \pm(1 + i)$, vilket ger lösningarna $z_1 = 1 + i - (1 - i) = i2$ och $z_2 = -(1 + i) - (1 - i) = -2$.

b) Multiplikation med $re^{i\theta}$ ger en skalning med faktor r och en vridning med vinkeln θ. Eftersom $1 - i = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$ så skalar vi alltså först z med en faktor $\sqrt{2}$ och vrider det med vinkel $\pi/4$ *medurs*. För att få tillbaka z kan vi multiplicera med $1/(1 - i)$ vilket kan skrivas

$$\frac{1}{1 - i} = \frac{1 + i}{(1 - i)(1 + i)} = \frac{1}{2} + i\frac{1}{2}.$$

c) Det gäller att $|e^{iz}| = e^{-\operatorname{Im} z} = e^{-4\sin(\pi/6)} = e^{-2}$.

3. Låt $y(t)$ beteckna den kunskapsmängd som Anna tillgodogjort sig t veckor efter kursstart. Då gäller dels $y(0) = 0$, $y(2) = M/4$, men också

$$y'(t) = k(M - y(t)) - \frac{3}{5}ky(t) = -\frac{8}{5}ky(t) + kM.$$

Vi skall undersöka huruvida $y(8)$ är större än eller mindre än $M/2$.

Differentialekvationen kan lösas på alla möjliga sätt vi lär oss i kursen, och lösningen blir

$$y(t) = Ce^{-8kt/5} + \frac{5M}{8}.$$

Villkoret $y(0) = 0$ ger $C = -5M/8$. Villkoret $y(2) = M/4$ ger sedan

$$\frac{M}{4} = \frac{5M}{8}(1 - e^{-16k/5}).$$

Härur kan k lösas ut (och då får man $k = 5(\ln(5/3))/16$), men det är eventuellt beräkningsmässigt enklare att först observera att $e^{-16k/5} = 3/5$ för att sedan få

$$\begin{aligned} y(8) &= \frac{5M}{8}(1 - e^{-64kt/5}) = \frac{5M}{8}(1 - (e^{-16k/5})^4) \\ &= \frac{5M}{8}\big(1 - (3/5)^4\big) = \frac{68}{125}M. \end{aligned}$$

Eftersom $68/125 > 1/2$ så kommer Anna Lys att klara tentamensskrivningen. Vi ber att få gratulera.

4. a) –

b) Den första integralen är generaliserad, och vi får

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+4x^2}\,dx &= \lim_{R\to+\infty} \int_0^R \frac{1}{1+(2x)^2}\,dx = \lim_{R\to+\infty} \left[\frac{1}{2}\arctan(2x)\right]_0^R \\ &= \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{2}\arctan(2R) = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

För den andra integralen kan man först låta $x = \sin t$, vilket ger (till exempel) $\int_0^{\pi/2} t^2 \cos t\,dt$. Denna kan sedan beräknas med två partialintegrationer (se exempel 12.10 i kursboken), resultatet blir

$$\int_0^{\pi/2} t^2 \cos t\,dt = \left[t^2 \sin t + 2t\cos t - 2\sin t\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{4}(\pi^2 - 8).$$

Alternativt kan en primitiv funktion bestämmas direkt genom upprepad partialintegration,

$$\begin{aligned} \int (\arcsin x)^2\,dx &= \int D(x)\cdot(\arcsin x)^2\,dx \\ &= x(\arcsin x)^2 - \int x \cdot 2\arcsin x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \\ &= x(\arcsin x)^2 + \int 2\arcsin x \cdot D(\sqrt{1-x^2})\,dx \\ &= x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - \int 2\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-x^2}\,dx \\ &= x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2x + C. \end{aligned}$$

Alltså blir

$$\int_0^1 (\arcsin x)^2\,dx = \left[x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2x + C\right]_0^1 = \frac{1}{4}(\pi^2 - 8).$$

5. Arean beskrivs av integralen $\int_1^{1.1} 1/x\,dx = \ln 1.1$, så vår uppgift är att beräkna $\ln 1.1$ numeriskt. Vi gör detta genom att använda en Maclaurinutveckling av $f(x) = \ln(1+x)$.

Vi börjar med att undersöka hur många termer vi behöver ta med (här kan man förstås pröva sig fram i stället). Eftersom $f'(x) = 1/(1+x)$, $f''(x) = -1/(1+x)^2$, …, $f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}(n-1)!/(1+x)^n$ så kommer feltermen i $x = 0.1$ då vi tar med n termer i polynomet, uttryckt på Lagranges form, att bli

$$R_{n+1}(0.1) = \frac{1}{(n+1)!}\frac{(-1)^{n+2}n!}{(1+\xi)^{n+1}}0.1^{n+1} = \frac{(-1)^{n+2}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}0.1^{n+1}$$

där $0 \le \xi \le 0.1$. Det räcker att ta $n = 2$, ty då får vi följande uppskattning för felet

$$|R_3(0.1)| \le \frac{1}{(2+1)}0.1^3 < 0.5 \cdot 10^{-3}.$$

Det återstår att beräkna approximationen. Maclaurinpolynomet p_2 till f av ordning 2 blir

$$p_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 = 0 + x - \frac{1}{2}x^2.$$

Speciellt gäller det att

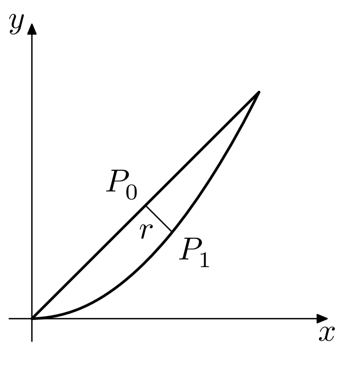
$$p_2(0.1) = 0.1 - \frac{1}{2}\cdot 0.1^2 = 0.095.$$

Alltså är, enligt Maclaurins formel med felterm på Lagranges form,

$$|\ln 1.1 - 0.095| = |f(0.1) - p_2(0.1)| = |R_3(0.1)| < 0.5 \cdot 10^{-3}.$$

Det sökta närmevärdet är således 0.095.

6.



Vi låter P_0 vara en punkt på linjen med avstånd a från origo, och P_1 vara en punkt på parabeln med x-koordinat x. Vi låter vidare r vara avståndet mellan P_0 och P_1 (se figur). Enligt skivformeln blir rotationsvolymen

$$V = \int_0^{\sqrt{2}} \pi r^2 \, da.$$

Vi söker samband mellan a, r och x, och byter sedan variabel i integralen till x. Eftersom P_0 har koordinater $(a/\sqrt{2}, a/\sqrt{2})$ och P_1 har koordinater (x, x^2) får vi med Pythagoras sats att

$$r^2 = (x - a/\sqrt{2})^2 + (x^2 - a/\sqrt{2})^2 = x^4 + x^2 + a^2 - \sqrt{2}a(x + x^2). \tag{1}$$

Men Pythagoras sats på triangeln med hörn i origo, P_0 och P_1 ger även

$$a^2 + r^2 = x^2 + x^4. \tag{2}$$

Eliminerar vi r^2 från (1) och (2) får vi

$$x^2 + x^4 - a^2 = x^4 + x^2 + a^2 - \sqrt{2}a(x + x^2)$$

vilket ger sambandet

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + x^2) \tag{3}$$

mellan a och x. Vi sätter in detta i (2), och får följande uttryck för r^2:

$$r^2 = x^2 + x^4 - a^2 = \frac{1}{2}(x^2 + x^4) - x^3.$$

I integralen $\int_0^{\sqrt{2}} \pi r^2 \, da$ kan vi alltså göra variabelbytet i (3), vilket ger oss

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^{\sqrt{2}} \pi r^2 \, da = \int_0^1 \pi \Big(\frac{1}{2}(x^2 + x^4) - x^3 \Big) \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + 2x) \, dx \\
&= \frac{\sqrt{2}\pi}{4} \int_0^1 x^2 + x^4 - 2x^3 + 2x^3 + 2x^5 - 4x^4 \, dx \\
&= \frac{\sqrt{2}\pi}{4} \Big(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} - 2\frac{1}{4} + 2\frac{1}{4} + 2\frac{1}{6} - 4\frac{1}{5} \Big) = \frac{\sqrt{2}\pi}{60}.
\end{aligned}$$

Alternativ lösning Vi kan rotera parabeln (t, t^2), $0 \le t \le 1$ $\pi/4$ radianer medurs och sedan använda den vanliga skivformeln. Vi nyttjar att punkten (t, t^2) i planet kan identifieras med det komplexa talet $t + it^2$. Den önskade rotationen fås genom att multiplicera med $e^{-i\pi/4} = (\sqrt{2}/2)(1 - i)$, vilket ger att vår roterade parabel blir

$$x(t) + iy(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)(t + it^2) = \frac{\sqrt{2}}{2}\big((t + t^2) + i(-t + t^2)\big), \quad 0 \le t \le 1.$$

Volymen fås nu med den vanliga skivformeln (och $dx = x'(t)\, dt$),

$$V = \int \pi y^2 \, dx = \int_0^1 \pi \Big(\frac{\sqrt{2}}{2}(-t + t^2) \Big)^2 D\Big[\frac{\sqrt{2}}{2}(t + t^2) \Big] \, dt = \cdots = \frac{\sqrt{2}\pi}{60}.$$