LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
TENTAMENSSKRIVNING
MATEMATIK

ENDIMENSIONELL ANALYS B2/A3
FMAA05/FMAA01
24.08.2020, 08:00–13:00

Inga hjälpmedel. För att du skall kunna erhålla full poäng skall dina lösningar vara läsbara, läsvärda och försedda med ordentliga motiveringar. Lämna, om möjligt, tydliga och enkla svar. Varje uppgift kan som mest ge 3 poäng.

GODKÄNTDEL

För att bli godkänd krävs dels högst en uppgift med 0 poäng av dessa sex uppgifter, dels minst 9 poäng av 18 möjliga.

1. Bestäm $\displaystyle\int \frac{1}{(x+5)(x^2+1)}\,\mathrm{d}x$ på ett intervall som innehåller 0.

2. Lös begynnelsevärdesproblemet $y''(t) + y(t) = -3\sin(2t), y(0) = 0, y'(0) = 3$.

3. Härled ett uttryck för arean av en sfär med radie R.

4. Ange maclaurinpolynomet av grad 4 till $f(x) = \cos^4 x$.

5. Beräkna den generaliserade integralen $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

6. Tant Grön är mycket noga med sitt tedrickande. Hennes avancerade vattenkokare värmer vattnet till 88 °C. Därefter låter hon sitt oolong-te dra i exakt 2 minuter, och när det är gjort visar hennes termometer att dryckens temperatur sjunkit till 78 °C.

   Hur länge skall Tant Grön sedan vänta innan hon börjar läppja på sitt te, om hon vill göra det då teets temperatur är 53 °C?

   Du kan anta att Newtons avsvalningslag gäller, dvs. att avsvalningshastigheten hos teet är proportionell mot differensen mellan tevattnets temperatur och omgivningens temperatur. Du kan även anta att omgivningens temperatur är 18 °C.

Överbetygsdelen finner du på nästa sida

ÖVERBETYGSDEL

Om du klarat godkäntdelen har du chans på överbetyg. För att få betyg 4 krävs minst 4 poäng på denna del. För betyg 5 krävs minst 7 poäng.

7. Beräkna gränsvärdet $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^x - 1}{\ln(1+x)\ln x}$.

8. Lös differentialekvationen $yy' = kx$ och beskriv vilka typer av kurvor lösningarna utgör för olika värden på konstanten k.

9. Antag att punkterna A, B och C utgör hörn i en triangel. Låt R beteckna radien för triangelns omskrivna cirkel. Visa att

$$\frac{AB \cdot BC \cdot CA}{AB + BC + CA} \leq R^2$$

till exempel genom att först visa identiteten

$$z_1^2(z_2 - z_3) + z_2^2(z_3 - z_1) + z_3^2(z_1 - z_2) = (z_2 - z_1)(z_3 - z_2)(z_1 - z_3)$$

för komplexa tal z_1, z_2 och z_3.

10. Inom tillämpningar i fysiken dyker de så kallade Besselfunktionerna upp. För heltal $n \geq 0$ definieras Besselfunktionen av första typen och ordning n med hjälp av integralen

$$\mathrm{J}_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(nt - x\sin t)\,\mathrm{d}t \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Man kan bestämma deras derivator genom att derivera integranden. Således gäller

$$\mathrm{J}_n'(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(nt - x\sin t)\sin t\,\mathrm{d}t$$

och

$$\mathrm{J}_n''(x) = -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(nt - x\sin t)\sin^2 t\,\mathrm{d}t.$$

Använd detta faktum för att visa att $y = \mathrm{J}_n(x)$ uppfyller Bessels differentialekvation

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + (x^2 - n^2)y = 0.$$