LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
ENDIMENSIONELL ANALYS A3/B2
2020–03–21 kl. 8–13

Lösningarna ska vara försedda med ordentliga motiveringar. Lämna tydliga svar. Varje uppgift kan som mest ge 3 poäng.

Godkäntdel

För att bli godkänd krävs dels högst en uppgift med 0 poäng av dessa sex uppgifter, dels minst 9 poäng av 18 möjliga.

1. Bestäm arean av det begränsade område A i xy-planet som begränsas av kurvorna $y = x^2$ och $y = x^3$. Bestäm sedan volymen av den rotationskropp man får om man låter området A rotera kring x-axeln.

2. Lös ekvationen

$$z^2 - 6iz - 9 + 8i = 0.$$

Beräkna sedan $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^{100}$. Svaret skall ges på formen $a + bi$.

3. Definiera vad som menas med Maclaurinpolynomet av ordning n till en funktion f. Använd sedan Maclaurinutveckling för att beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - \cos 2x}{x \ln(1+x)}.$$

4. Lös differentialekvationen

$$y'' + 16y = 10e^{2x}.$$

5. Beräkna den generaliserade integralen

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3} \ln(x^2 + 1)\, dx.$$

6. Låt

$$f(t) = \begin{cases} 1 & -1 \le t < 1 \\ -2t + 3 & 1 \le t < 2 \\ -1 & 2 \le t \le 3, \end{cases}$$

och låt vidare $S(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\, dt$, $-1 \le x \le 3$. Rita grafen för S. Ange speciellt största och minsta värde för S.

VAR GOD VÄND!

Överbetygsdel

Om du klarat föregående del har du chans på överbetyg. För att få betyg 4 krävs minst 4 poäng på denna del. För betyg 5 krävs minst 7 poäng.

7. En brandman som väger 100 kg glider, från stillastående, nerför en oändligt lång vertikal brandstång. De enda krafter som verkar på brandmannen är tyngdkraften (där tyngdaccelerationen är $g = 10$ m/s^2) samt en bromsande friktionskraft som i varje ögonblick är proportionell mot brandmannens fart (proportionalitetskonstant $k = 50$ kg/s). Bestäm ett uttryck för hur brandmannens fart beror av tiden. Vad blir farten efter mycket lång tid?

(Vi påminner om Newtons kraftekvation som säger att summan av alla krafter som verkar på en kropp är lika med kroppens massa multiplicerat med dess acceleration.)

8. Använd integraluppskattning för att visa att

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1+k^2)\arctan k} \leq \ln 2 + \frac{2}{\pi}.$$

9. Låt K vara den homogena skiva i första kvadranten av xy-planet som begränsas av kurvan $y = 1 + \sqrt{x}$, koordinataxlarna och linjen $x = 1$. Bestäm masscentrum av K.

10. Låt f vara en deriverbar funktion, definierad på $]0,\infty[$, sådan att $f(1) = 1/2$. Vidare gäller det, för varje $a > 0$, att tangenten till funktionskurvan $y = f(x)$ i punkten $(a, f(a))$ skär y-axeln i punkten $(0, f(a)^2)$. Bestäm, om möjligt, denna funktion f.

LYCKA TILL!