

Inga hjälpmedel är tillåtna. För att du ska erhålla full poäng skall dina lösningar vara läsbara och försedda med fullständiga motiveringar, om inte annat anges. Lämna tydliga svar. Varje uppgift kan som mest ge 3 poäng.

Godkäntdel

För att bli godkänd krävs minst 9 poäng av 18 möjliga och högst en uppgift med 0 poäng på denna del.

1. Beräkna samtliga nollställen till det komplexa polynomet $P(z) = z^2 + (4 + 2i)z + 6$.
2. Definiera vad som menas med Maclaurinpolynomet $p_n(x)$, och använd Maclaurinutvecklingar för att beräkna gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{1 - \cos x}$.
3. Beräkna integralerna $\int_0^1 x \arctan x \, dx$ och $\int_0^1 \frac{1}{1 + \sqrt{x}} \, dx$
4. Lös ekvationen $y' - \frac{1}{x}y = x$, för $x > 0$, med villkoret $y(1) = 2$.
5. Lös differentialekvationen $y'' + 3y' + 2y = x + 1$, med begynnelsevillkor $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
6. Beräkna volymen av rotationskroppen som alstras då kurvstycket $y = 2x^{\frac{3}{2}}$, $1 \leq x \leq 2$, roterar runt x -axeln. Beräkna även kurvstyckets längd.

Överbetygsdel

Om du klarat föregående del har du chans på överbetyg. För att få betyg 4 krävs minst 4 poäng på denna del. För betyg 5 krävs minst 7 poäng.

7. Beräkna $\int_{-1}^1 e^{|x|} \cos x \, dx$.

8. Hur kan $\sum_{k=1}^N f(k)$ uppskattas med en integral av f , om f är en positiv avtagande

funktion? Uppskatta felet man får när man approximerar $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ med $\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{k^2}$.

9. En bakteriepopulation har en tillväxt som vid varje tidpunkt är proportionell mot produkten av antalet bakterier $y(t)$ och faktorn $K - y(t)$, med proportionalitetskonstanten $r > 0$. Bakteriepopulationen påverkas även av en dödlighet som vid varje ögonblick är proportionell mot antalet bakterier, med proportionalitetskonstanten $\alpha > 0$. Låt $y(0) = K > 0$. Ställ upp en differentialekvation som beskriver förändringen av antalet bakterier över tiden och beräkna minsta värdet på α som gör att bakteriepopulationen garanterat utrotas.

10. Beräkna längden av kurvstycket $y(t) = e^{-t}$, $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ med ett fel mindre än 0.03.

LYCKA TILL!