LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
ENDIMENSIONELL ANALYS B2/A3
2019-05-03 kl 8.00–13.00

Inga hjälpmedel är tillåtna. För att du ska erhålla full poäng skall dina lösningar vara läsbara och försedda med ordentliga motiveringar. Lämna tydliga svar. Varje uppgift kan som mest ge 3 poäng.

Godkäntdel

För att bli godkänd krävs dels högst en uppgift med 0 poäng av dessa sex uppgifter, dels minst 9 poäng av 18 möjliga på godkäntdelen.

1. Beräkna

$$\int \frac{x}{x^2-1}\,dx, \qquad \int_0^{\pi/4} x\sin x\,dx, \qquad \int x\sin x^2\,dx.$$

2. Finn alla komplexa lösningar till $z^4+4=0$. Faktorisera sedan x^4+4 i reella faktorer av så låg grad som möjligt.

3. Lös differentialekvationerna

a) $y''+y=e^x$,

b) $y'-\frac{2x}{4+x^2}y=x$.

4. Skriv ner Maclaurinutvecklingen av ordning 2 för funktionerna $\ln(1+x)$ och $\cos x$ och ange resttermen på valfri form. Beräkna sedan gränsvärdet

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)-2\ln(1+x)}{1-\cos(x)}$$

med hjälp av dessa utvecklingar.

5. Formulera integralkalkylens medelvärdessats. Illustrera den sedan med hjälp av en figur för funktionen $f(x)=x^2$ på intervallet $[1,2]$. Verifiera också att satsen stämmer för detta exempel.

6. Beräkna först volymen av den ellipsoid som bildas då ellipsen

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad a,b>0$$

roterar kring x-axeln. Betrakta sedan en rugbyboll som har formen av en ellipsoid med längd 30 cm längs sin symmetriaxel, och omkrets 60 cm på det tjockaste stället i ett plan som är vinkelrät mot symmetriaxeln. Bestäm bollens volym.

VAR GOD VÄND!

Överbetygsdel

Om du klarat godkäntdelen har du chans på överbetyg. För att få betyg 4 krävs minst 4 poäng på denna del. För betyg 5 krävs minst 7 poäng.

7. En student blandade ihop deriveringsreglerna på en tenta och trodde att derivatan av $f(x)g(x)$ var $f'(x)g'(x)$. Konstigt nog blev svaret rätt ändå. Den ena funktionen var $e^{1/x}$. Vilken var den andra funktionen? Hitta alla funktioner definierade för alla $x > 0$ som det skulle kunna vara.

8. Beräkna arean av den rotationsyta som uppstår när astroidkurvan

$$|x|^{2/3} + |y|^{2/3} = 1$$

roterar runt x-axeln.

9. Vattnet i en öppen skål avdunstar så att volymförändringen per tidsenhet hela tiden är proportionell mot vattenytans area. Visa att vattennivån i skålen sjunker med konstant hastighet oavsett skålens form. Du får anta att vattenytans area beror kontinuerligt på vattendjupet.

10. Lös differentialekvationen $y' = \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}}$ då $x > 0$.

LYCKA TILL!