LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
ENDIMENSIONELL ANALYS A3/B2
2019–03–23 kl. 8–13

INGA HJÄLPMEDEL. Lösningarna ska vara försedda med ordentliga motiveringar. Lämna tydliga svar. Varje uppgift kan som mest ge 3 poäng.

Godkäntdel

För att bli godkänd krävs dels högst en uppgift med 0 poäng av dessa sex uppgifter, dels minst 9 poäng av 18 möjliga.

1. Låt A vara området mellan x-axeln, linjen $x = \frac{\pi}{2}$ och kurvan $y = \sin x$, $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$. Bestäm arean av A. Bestäm även volymen av den rotationskropp som uppstår då området A roterar kring x-axeln.

2. Beräkna absolutbeloppet av det komplexa talet

$$\frac{(1+i)^7}{(-\sqrt{3}+3i)^4},$$

samt ange ett argument i intervallet $[0, 2\pi[$ för detta tal. Rita även i det komplexa talplanet de komplexa tal z som uppfyller att $|z - 1 + i| \le 1$.

3. Definiera vad som menas med Maclaurinpolynomet $p_n(x)$ av ordning n av en funktion f. Använd Maclaurinutveckling för att beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - e^{x/2}}{x^2}.$$

4. Definiera vad som menas med att den generaliserade integralen $\int_a^\infty f(x)\,dx$ är konvergent. Beräkna den generaliserade integralen

$$\int_2^\infty \frac{1}{x^3 - x}\,dx.$$

5. Lös differentialekvationen

$$y'' + 4y = x + e^{3x}.$$

6. Fiskpopulationen i en liten sjö vid en teknisk högskola smittas av en sjukdom, vilket orsakar att populationen minskar med en hastighet som vid varje tidpunkt är proportionell mot antalet fiskar i sjön. Proportionalitetskonstanten är 1/10 (med enheten år^{-1}). Samtidigt bidrar ett återplanteringsprogram till att det kontinuerligt tillförs fisk i sjön med hastigheten 100 fiskar per år. Ställ upp en differentialekvation som beskriver situationen.

Vid en viss tidpunkt uppgår antalet fiskar i sjön till 800 individer. Hur många fiskar finns i sjön 5 år senare? Vad händer med antalet fiskar efter mycket lång tid?

VAR GOD VÄND!

Överbetygsdel

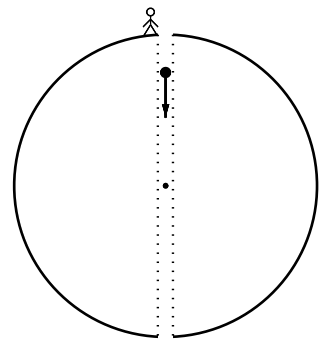
Om du klarat föregående del har du chans på överbetyg. För att få betyg 4 krävs minst 4 poäng på denna del. För betyg 5 krävs minst 7 poäng.

7. Bestäm alla kontinuerliga funktioner y sådana att

$$y(x) = -2 + \int_0^x y(t)\cos 2t\,dt.$$

8. Visa med hjälp av integraluppskattning att $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k^3} \leq \frac{1}{8}$.

9. Vi tänker oss att det går att borra ett hål från jordytan, rakt ner genom jordens centrum, ut på andra sidan. Ett föremål som faller i detta hål skulle (givet vissa förenklingar) påverkas av en gravitationskraft riktad mot centrum med en storlek direkt proportionell mot avståndet till centrum. Newtons kraftekvation säger vidare att summan av de krafter som verkar på ett föremål är lika med föremålets massa multiplicerat med dess acceleration.



Ett föremål med massa m släpps ner i hålet, från stillastående, i dess ena öppning vid jordytan. Med vilken hastighet passerar föremålet centrumpunkten? Vi förutsätter att jorden är ett klot med radien $R = 6.4 \cdot 10^6$ m, och att tyngdaccelerationen vid jordytan är 10 m/s^2. (Vi bortser från eventuellt luftmotstånd.)

10. Densiteten ρ (enhet kg/m^3) av ett klot med radien 1 m varierar med avståndet r m till centrum enligt

$$\rho(r) = \frac{1000}{\sqrt{r+1}}.$$

Beräkna klotets massa.

LYCKA TILL!