

Inga hjälpmedel är tillåtna. För att du ska kunna erhålla full poäng ska dina lösningar vara läsbara och försedda med ordentliga motiveringar. Lämna tydliga svar. Varje uppgift kan som mest ge 3 poäng.

Godkändtel

För att bli godkänd krävs dels högst en uppgift med 0 poäng av dessa sex uppgifter, dels minst 9 poäng av 18 möjliga.

1. Ange en primitiv funktion till var och en av följande funktioner:

$$a) \frac{1}{1+x}, \quad b) \frac{1}{(1-x)^2}, \quad c) \frac{1}{1+x^2}, \quad d) \frac{x}{1+x^2}, \quad e) xe^{-x^2/2}, \quad f) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Anmärkning. 0-3 rätt ger 0 poäng, 4 rätt ger 1 poäng, 5 rätt ger 2 poäng och 6 rätt ger 3 poäng.

2. Definiera e^{ix} . Skriv sedan talet

$$z = \frac{\sqrt{3} + 3i}{1 + i}$$

både på formen $a + bi$, där a och b är reella tal (innehåller inga trigonometriska funktioner) och på polär form.

3. Definiera vad som menas med Maclaurinutvecklingen av ordning 5 för en funktion och visa att

$$\left| \cos(2x) - 1 + 2x^2 - \frac{2x^4}{3} \right| \leq \frac{x^6}{11}$$

för alla x .

4. Om f är en kontinuerlig funktion på intervallet $[a, \infty[$, vad menas då med att integralen $\int_a^\infty f(x) dx$ konvergerar? Bestäm alla primitiva funktioner till

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)}$$

och avgör om integralen $\int_3^\infty f(x) dx$ är konvergent eller inte.

5. Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen

$$y'' - y' - 6y = e^{-x} + x.$$

6. Låt D vara området mellan kurvstycket $y = \sqrt{x}e^{-x}$, $1 \leq x \leq 2$ och x -axeln. Om vi roterar D runt x -axeln, får vi en kropp K . Beräkna volymen av K .

Var god vänd!

Överbetygsdel

Om du klarat godkänddelen har du chans på överbetyg. För att få betyg 4 krävs minst 4 poäng på denna del. För betyg 5 krävs minst 7 poäng.

7. Bestäm alla lösningar till ekvationen $z^6 - (1 + 2i)z^3 - 1 + i = 0$ och rita ut dessa i ett komplext talplan. Lösningarna får anges på polär form.

8. Formulera analysens huvudsats och beräkna derivatan av funktionen

$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{\sin t}{t} dt, \quad x > 1.$$

9. En nysyntetiserad drog som kan köpas på internet börjar sprida sig bland ungdomarna i ett samhälle. Spridningen sker med en hastighet som är proportionell mot produkten av antalet ungdomar som använder den och antalet som inte använder den (men är beredda att göra det), med en proportionalitetskonstant som är 10^{-4} (per månad och individ). Samhället innehåller totalt 3000 ungdomar som är beredda att använda drogen.

När detta hållit på ett tag, och 800 ungdomar använder drogen, upptäcker man att den är långt ifrån ofarlig. Därför beslutar sig 200 ungdomar per månad för att sluta använda drogen. Kommer detta att betyda att drogen försvinner helt från samhället? Om så är fallet, hur lång tid tar det?

10. Om vi roterar kurvstycket $y = x^2 - \frac{1}{8} \ln(x)$, $0 < x \leq 2$, runt y -axeln får vi ett ytstycke. Beräkna dess area.