TENTAMENSSKRIVNING	**ENDIMENSIONELL ANALYS**
LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA	**DELKURS B2/A3**
MATEMATIK	**EXEMPELSKRIVNING**

Inga hjälpmedel är tillåtna. För att du skall kunna erhålla full poäng skall dina lösningar vara läsvärda och försedda med fullständiga motiveringar, om inte annat anges. Lämna tydliga svar.

Godkäntdel

För att bli godkänd på skrivningen krävs minst 9 av 18 poäng och högst en uppgift med 0 poäng på denna del.

1. Bestäm *en* primitiv funktion till var och en av följande funktioner. Endast svar krävs på denna uppgift. 0–2 rätt ger 0p, 3 rätt ger 1p, 4 rätt ger 2p och 5 rätt ger 3p.

   a) $\dfrac{x}{1+x}$ b) $\dfrac{1}{x(1+x)}$ c) $\dfrac{1}{1+x^2}$ d) xe^{x^2} e) xe^x

2. Lös begynnelsevärdesproblemet

$$y'' + 13y' + 40y = 54e^x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

3. Lös ekvationen $z^2 - (2i+1)z + 3 + 3i = 0$.

4. Definiera vad som menas med Maclaurinpolynomet av ordning n till en funktion, och bestäm gränsvärdet

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \arctan x}{x\ln(1+x^2)}.$$

5. Bestäm alla lösningar till differentialekvationen

$$xy'(x) + y(x) = x\sin x, \quad x > 0.$$

   Finns det någon lösning som förblir begränsad då $x \to 0^+$?

6. Myrlejonsländans larv gräver ner sig längst ner i en grop i fin sand för att fånga sin mat, myror. Om larven ligger i origo och fångstgropen har som rand den rotationsyta som uppkommer när vi roterar $y = 3x/\sqrt{1+x^2}$, $0 \le x \le 1$ runt y-axeln, hur stor är fångstgropens volym?

Överkursdel

Om du klarat föregående del har du chans på överbetyg. För att få betyg 4 krävs minst 4 poäng på denna del. För betyg 5 krävs minst 7 poäng.

7. Beräkna båglängden av den logaritmiska spiralen, som parametriseras som

$$\begin{cases} x(\theta) = e^{-\theta/5}\cos\theta, \\ y(\theta) = e^{-\theta/5}\sin\theta, \end{cases} \qquad 0 \leq \theta < +\infty.$$

8. En infektionssjukdom antas sprida sig i en befolkningsgrupp med en hastighet som är proportionell mot produkten av antalet infekterade och antalet oinfekterade personer. Vid en tidpunkt är halva befolkningen smittad. Spridningshastigheten är då så stor att, om den fortsatte med den hastigheten hela tiden, så skulle hela befolkningen vara smittad efter 24 dagar. Hur stor del av befolkningen kommer verkligen att vara smittad efter 24 dagar enligt modellen? Under månaden ändras inte antalet individer i befolkningen.

9. Kallan dricker varm choklad ur en cylinderformad mugg vars höjd är h och vars botten är en cirkelskiva med radie r. Efter en stund upptäcker Kallan till sin förtjusning att om muggen lutas så mycket att chokladen precis rör vid övre kanten på muggen så blir exakt halva botten synlig. Beräkna volymen av den choklad som är kvar i muggen vid detta tillfälle.

10. I figuren nedan har vi ritat en del av kurvan $y^2 = 2x^3 - x^4$, tillsammans med en halvcirkel. Visa att arean av de två skuggade områdena är lika.