LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
ENDIMENSIONELL ANALYS B2/A3
2018-08-27 kl 8.00–13.00

INGA HJÄLPMEDEL.
Lösningarna skall vara försedda med ordentliga motiveringar.

1. a) Lös ekvationen $z^2 - (4+2i)z + 3 + 3i = 0$. (0.6)

b) Beräkna $(1+i)^{55}$. Svara på formen $a + bi$. (0.4)

2. a) Beräkna $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^3 x\, dx$. (0.5)

b) Bestäm $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)^2(x-2)}$. (0.5)

3. a) Skriv upp Maclaurins formel med Lagranges restterm. (0.3)

b) Visa att $\displaystyle\left|\sin 2x - 2x + \frac{4x^3}{3}\right| \le \frac{4|x|^5}{15}$ för alla $x \in \mathbb{R}$. (0.7)

4. Lös begynnelsevärdesproblemen

a) $xy' + y = 4x^3, \quad y(1) = 2,$ (0.3)

b) $(1+x^2)y' = y^2, \quad y(0) = 1,$ (0.3)

c) $y'' + 2y' - 3y = 0, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 1.$ (0.4)

5. a) Avgör om de generaliserade integralerna $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\, dx$ och $\displaystyle\int_0^{1} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\, dx$ är konvergenta eller divergenta. Är $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\, dx$ konvergent? (0.5)

b) Visa med integraluppskattning att $\displaystyle\frac{2}{e} \le \sum_{k=1}^{\infty} ke^{-k} \le \frac{3}{e}$. (0.5)

6. Ett vattenur eller en klepsydra är en av de tidigaste tidmätarna och användes redan på 1500-talet f. Kr. i Egypten. Tidens gång mättes genom att vatten i ett kärl på ett kontrollerat sätt tappades av.
En klepsydra består av en behållare som är rotationssymmetrisk kring den vertikala axeln, och formen kan beskrivas med hjälp av en graf till en funktion $y = f(x)$ som roterar kring y-axeln. I botten av behållaren borras ett litet hål där vattnet kan rinna ut. Vi antar att vattnet rinner ut enligt Torricellis lag, d.v.s. utströmningshastigheten är proportionell mot kvadratroten ur vattendjupet.
Bestäm funktionen f så att höjden av vattnet minskar med konstant hastighet.

LYCKA TILL!