

Inga hjälpmedel är tillåtna. För att du skall kunna erhålla full poäng skall dina lösningar vara läsbara och försedda med ordentliga motiveringar. Lämna tydliga svar.

1. Lös begynnelsevärdesproblemet

$$y'' + 13y' + 40y = 54e^x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

2. a) Definiera  $e^{i\theta}$  för reella  $\theta$ , samt skriv upp och härled Eulers formler. (0.5)

b) Bestäm  $\int e^{2x} \cos(x) dx$ . (0.5)

3. a) Definiera vad som menas med Maclaurinpolynom av ordning  $n$  till en funktion. (0.2)

- b) Antag att funktionen  $f$  är åtta gånger kontinuerligt deriverbar och att

$$f(x) = 1 - 3x^2 + 5x^4 - 7x^6 + x^8 B(x),$$

där  $B$  är någon funktion som är begränsad i en omgivning av 0. Bestäm derivatorna  $f'(0)$  och  $f^{(4)}(0)$ . (0.3)

- c) Bestäm gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \arctan x}{x \ln(1 + x^2)}. \quad (0.5)$$

4. a) Bestäm alla lösningar till differentialekvationen

$$xy'(x) + y(x) = x \sin x, \quad x > 0.$$

Finns det någon lösning som förblir begränsad då  $x \rightarrow 0^+$ ? (0.5)

- b) Bestäm samtliga lösningar till differentialekvationen  $y' = y(1 - y)$  som uppfyller begynnelsevillkoret  $y(0) = 1/2$ . (0.5)

5. a) Formulera jämförelsesatsen för generaliserade integraler på formen

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx.$$

Illustrera med en figur. (0.3)

- b) För vilka positiva heltal  $k$  är den generaliserade integralen

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^k}{x^6 + 1} dx$$

konvergent? Välj ett sådant  $k$ , och beräkna integralen för detta värde. (0.7)

6. Kallan dricker varm choklad ur en cylinderformad mugg vars höjd är  $h$  och vars botten är en cirkelskiva med radie  $r$ . Efter en stund upptäcker Kallan till sin förtjusning att om muggen lutas så mycket att chokladen precis rör vid övre kanten på muggen så blir exakt halva botten synlig. Beräkna volymen av den choklad som är kvar i muggen vid detta tillfälle.