

INGA HJÄLPMEDEL. Lösningarna ska vara försedda med ordentliga motiveringar.

1. Lös begynnelsevärdesproblemet

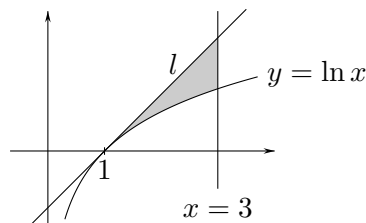
$$y'' - y' - 2y = 3e^{2x}, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

2. a) Lös ekvationen $z^2 - 4iz - 7 + 4i = 0$. Rötterna ska ges på formen $a + bi$. (0.6)

b) Beräkna Maclaurinpolynomet av ordning 6 till funktionen $f(x) = \sqrt{x^3 + 1}$. (0.4)

3. a) Lös differentialekvationen $xy' + 2y = e^{x^2}$, $x > 0$. (0.4)

b) Låt l vara tangenten till kurvan $y = \ln x$ i punkten med x -koordinat 1. Bestäm arean av det område i xy -planet som begränsas av l samt kurvorna $y = \ln x$ och $x = 3$. (0.6)



4. a) Beräkna integralen

$$\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin^3 x + \sin x} dx. \quad (0.6)$$

b) Derivera funktionerna

$$S(x) = \int_1^x \frac{\sin t}{t} dt \quad \text{och} \quad T(x) = \int_1^{x^3} \frac{\sin t}{t} dt. \quad (0.4)$$

5. En vattentank har formen av den rotations kropp som fås då kurvan

$$y = x^3, \quad 0 \leq x \leq 2,$$

roterar kring y -axeln (enhet meter).

a) Bestäm tankens volym. (0.3)

b) Tanken fylls på med vatten. Vid en viss tidpunkt, då vattennivån i tanken är 3 meter (räknat från botten), stiger vattennivån med hastigheten 2 m/min. Med vilken hastighet (m³/min) ökar vattenvolymen i tanken vid denna tidpunkt? (0.3)

c) Tanken är nu helt fylld med vatten (med konstant densitet). Bestäm tyngdpunkten för tankens innehåll. (0.4)

VAR GOD VÄND!

6. a) Fiskpopulationen i en liten sjö vid en teknisk högskola smittas av en sjukdom, och börjar så sakteliga att dö ut. Vid smittotillfället finns det 125 fiskar i sjön, och efter två veckor har antalet minskat till 64. Antag att populationens storlek N minskar med en hastighet som, i varje ögonblick, är proportionell mot $N^{1/3}$. Hur lång tid tar det, räknat från smittotillfället, för fiskpopulationen att dö ut helt? (0.5)
- b) För att försöka rädda fiskpopulationen i a)-uppgiften tillsätts en kemikalie (fiskmedicin) i sjön. Sjön är cirkelformad med radien 10 m. Kemikalien hälls i mitt i sjön, och sprider sig symmetriskt utåt från mittpunkten genom att flyta på ytan. Vid en viss tidpunkt uppmäts koncentrationen av kemikalien, r meter från mittpunkten, till

$$\frac{1}{100 + r^2} \text{ kg/m}^2.$$

Hur mycket av kemikalien finns på ytan vid denna tidpunkt? (0.5)

LYCKA TILL!