

INGA HJÄLPMEDEL. Lösningarna ska vara försedda med ordentliga motiveringar.
Lämna tydliga svar om så är möjligt.

1. Bestäm en primitiv funktion till var och en av följande funktioner (0.2/styck)

a) $\frac{x}{x+1}$ b) $\frac{1}{x(1+x)}$ c) $\frac{1}{1+x^2}$ d) xe^{x^2} e) xe^x .

Ange endast svar.

2. a) Bestäm den allmänna lösningen till ekvationen

$$y''(x) - 4y(x) = e^{3x} + 4. \quad (0.5)$$

- b) Beräkna den generaliserade integralen

$$\int_0^{\infty} \frac{e^x}{e^{2x} + 8e^x + 15} dx. \quad (0.5)$$

3. a) Rita i det komplexa talplanet ut alla tal z som samtidigt uppfyller de båda olikheterna $|z - 1 + i| < 2$ och $|z| \geq \frac{1}{2}$. (0.5)

- b) Vilket komplex tal får vi om vi roterar $z = 4 + 3i$ vinkeln $\pi/6$ moturs? Svaret skall ges på formen $a + bi$ och får inte innehålla trigonometriska funktioner. (0.5)

4. a) Formulera och bevisa analysens huvudsats. (0.6)

- b) Beräkna derivatan av funktionen

$$f(x) = \int_0^{\sqrt{x}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}, \quad 0 < x < 1. \quad (0.4)$$

5. a) Bestäm Maclaurinutvecklingen av ordning 2 av $(1+x)^a$ där a är en positiv, reell konstant. Resttermen ska anges på Lagranges form. (0.3)

- b) Bestäm ett sjättegradspolynom $p_6(x)$ sådant att

$$\left| (1+x^3)^{2/3} - p_6(x) \right| \leq \frac{x^9}{20}, \quad x \geq 0. \quad (0.3)$$

- c) Området mellan kurvan $y = (1+x^3)^{1/3}$, $0 \leq x \leq 1$, och x -axeln roteras runt x -axeln. Beräkna rotationsvolymen med ett fel som är $< 2 \cdot 10^{-2}$. Närmevärdet anges på formen πq där q är ett rationellt tal. (0.4)

6. En infektionssjukdom antas sprida sig i en befolkningsgrupp med en hastighet som är proportionell mot produkten av antalet infekterade och antalet oinfekterade personer. Vid en tidpunkt är halva befolkningen smittad. Spridningshastigheten är då så stor att, om den fortsatte med den hastigheten hela tiden, så skulle hela befolkningen vara smittad efter 24 dagar. Hur stor del av befolkningen kommer verkligen att vara smittad efter 24 dagar enligt modellen? Under månaden ändras inte antalet individer i befolkningen.

Lycka till!