

INGA HJÄLPMEDEL. Lösningarna ska vara försedda med ordentliga motiveringar.

1. a) Beräkna integralen $\int_0^{\infty} e^{-\sqrt{x}} dx$ genom att göra variabelbytet $y = \sqrt{x}$. (0.5)

b) Beräkna integralen $\int_0^1 \frac{x+2}{x^2-2x-3} dx$ (0.5)

2. a) Bestäm alla lösningar till ekvationen

$$z^2 + 4z - 3i = 0.$$

Ange svaren i formen $a + ib$. (0.6)

b) Bestäm alla komplexa tal z sådana att $z - \frac{1}{z}$ är rent imaginärt. (0.4)

3. a) Formulera satsen om Maclaurinutveckling. Glöm inte att ha med ett uttryck för resttermen. (0.3)

b) Bestäm ett polynom av grad 4, $p_4(x)$, som uppfyller

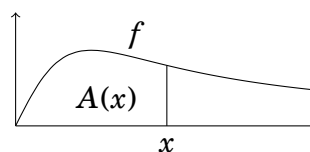
$$|\cos x + \sin x - p_4(x)| \leq 0.001,$$

för $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$. Glöm inte att motivera olikheten ordentligt. (0.7)

4. a) Formulera analysens huvudsats. (0.3)

b) För arean $A(x)$ i figuren gäller

$$A(x) = \ln(1+x^2)$$



för alla $x > 0$. Bestäm funktionen f för $x > 0$. (0.3)

c) Avgör, t ex med integraluppskattning, ifall serien

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\ln k}{k^2}$$

är konvergent. (0.4)

VAR GOD VÄND!

5. a) Beräkna volymen av kroppen som uppstår då ytan mellan kurvstycket $y = ax^3$, ($0 \leq x \leq 1$) och x -axeln roterar kring x -axeln ($a > 0$). (0.5)
- b) Beräkna volymen av kroppen som uppstår då ytan mellan samma kurvstycket $y = ax^3$, ($0 \leq x \leq 1$) och y -axeln roterar kring y -axeln ($a > 0$). (0.5)
6. Som följd av en brand i ett bränsleförråd måste brandkåren kyla ner en gastank som har temperaturen $T = 660^\circ C$. Man kyler ner tanken med $20^\circ C$ vatten (rumstemperatur) och noterar att på en timme sjunker tankens temperatur till $340^\circ C$. Tanken blir utom fara om temperaturen sjunker till $100^\circ C$ (eller lägre) på mindre än 4 timmar. I sammanhanget får man använda sig av Newtons avsvlningslag, som säger att temperaturen hos en kropp avtar med en hastighet som är proportionell mot temperaturskillnaden mellan kroppen och omgivningen.
- a) Sätt upp en differentialekvation som beskriver avkylningsprocessen. (0.2)
- b) Lös ekvationen och beräkna hur lång tid det tar att kyla ner tanken till $100^\circ C$. Klarar brandkåren uppdraget? (0.5)
- c) Samtidigt hamnar ytterligare en tank i fara (dvs $T = 660^\circ C$) i en annan del av byggnaden. Brandkåren har dock endast en vattenslang (pga nedskärningar) och tanken måste i början kylas ner i $20^\circ C$ luft (rumstemperatur) i stället, tills dess att första tanken är utom fara. På en timme sjunker temperaturen bara till $500^\circ C$ (eftersom luften inte kyler lika effektivt som vatten). När första tanken är nerkyld, får man använda vattenslangen till tank nr 2. Vilken temperatur har den tanken 4 timmar efter brandkåren börjat arbeta? Klarar brandkåren den tanken? (0.3)

LYCKA TILL!