LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
ENDIMENSIONELL ANALYS A3/B2
2017–03–18 kl. 8–13

INGA HJÄLPMEDEL. Lösningarna ska vara försedda med ordentliga motiveringar.

1. a) Bestäm en primitiv funktion till funktionen

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 9}. \qquad (0.5)$$

b) Bestäm samtliga lösningar till differentialekvationen

$$y' - \frac{1}{x}y = \frac{x^2}{x^2+1}, \qquad x > 0. \qquad (0.5)$$

2. a) Sätt $f(x) = \ln(x+1)$, och låt $p_2(x)$ vara Maclaurinpolynomet av ordning 2 till $f(x)$. Bestäm $p_2(x)$ och visa att det för alla $x \geq 0$ gäller att

$$|f(x) - p_2(x)| \leq \tfrac{1}{3}x^3.$$

Bestäm även ett närmevärde till ln(1.2) med ett fel som är högst $5 \cdot 10^{-3}$. (0.6)

b) Markera i det komplexa talplanet de tal z som uppfyller

$$\begin{cases} |z - 1 - i| \leq 1 \\ \operatorname{Re} z \geq 1 \end{cases}. \qquad (0.4)$$

3. a) Svängningarna hos ett visst tekniskt system beskrivs av differentialekvationen

$$y''(t) + 16y(t) = 2\cos 3t.$$

Bestäm samtliga lösningar till ekvationen. (0.6)

b) Systemet modifieras nu så att det i stället beskrivs av ekvationen

$$y''(t) + 16y(t) = 2\cos kt,$$

för någon konstant k. Bestäm konstanten k så att *resonans* uppstår (dvs. så att ekvationen får en lösning med obegränsat stor amplitud). Bestäm sedan samtliga lösningar till denna nya ekvation för detta värde på k. (0.4)

4. Låt K beteckna den homogena skiva som begränsas av kurvan $y = \ln(x+1)$, linjen $x = 1$ och x-axeln.

a) Beräkna arean av K. (0.4)

b) Bestäm tyngdpunkten (masscentrum) för K. Tyngdpunktens x-koordinat ges av formeln $x_T = \frac{1}{m}\int_K x\,dm$, där m är kroppens massa, och motsvarande formel gäller för tyngdpunktens y-koordinat. (0.6)

VAR GOD VÄND!

5. a) Formulera och bevisa analysens huvudsats. (Du får utan bevis använda integralkalkylens medelvärdessats.) (0.6)

b) Avgör om funktionen

$$g(x) = \tfrac{1}{8}e^x - \int_1^{\sqrt{x}} e^{t^2}\,dt, \qquad x > 0,$$

har ett minsta värde. Om så är fallet, för vilket värde på x antar funktionen detta minsta värde? (0.4)

6. En tank med höjden 1 m har formen av den rotationskropp som fås då kurvstycket

$$y = x^2 - 1, \qquad 1 \le x \le \sqrt{2}, \qquad \text{(enhet meter)}$$

roterar kring y-axeln. Själva bottenytan av tanken antas vara där x-axeln är.

a) Antag att tanken är fylld med ett material vars densitet ϱ varierar med höjden y m över bottenytan enligt

$$\varrho(y) = \frac{2}{\sqrt{y}+1} \quad \text{ton/m}^3.$$

Hur mycket väger materialet i tanken? (0.5)

b) Vi studerar nu samma tank, men antar i stället att den är fylld med vatten. Vattnet tappas sedan ut genom ett hål i bottenytan. Enligt Torricellis lag gäller det då att vätskenivån y m i tanken avtar med en hastighet som är proportionell mot faktorn

$$\frac{\sqrt{y}}{A(y)},$$

där $A(y)$ betecknar tvärsnittsarean hos tanken vid höjd y m. Antag att det tar 2 minuter att sänka vätskenivån från 1 m till 1/4 m. Ytterligare hur lång tid tar det att tömma tanken helt? (0.5)

LYCKA TILL!