

Inga hjälpmedel är tillåtna. För att du skall kunna erhålla full poäng skall dina lösningar vara läsbara och försedda med ordentliga motiveringar. Lämna tydliga svar.

1. Lös differentialekvationerna:

a) $y''(x) - y(x) = e^{-2x}$. (0.5)

b) $y'(x) = (y(x))^3$, $y(0) = 1$. (0.5)

2. a) Lös ekvationen $z^2 + (2 - 2i)z - 4i = 0$. (0.5)

b) Beskriv, i geometriska termer, vad som sker med det komplexa talet z då det multipliceras med $1 - i$. Finns det något komplext tal som vi kan multiplicera resultatet med för att få tillbaka z ? Skriv det i så fall på formen $a + ib$ där a och b är reella tal. (0.3)

c) Låt $z = 4e^{i\pi/6}$. Beräkna $|e^{iz}|$. (0.2)

3. En viss kurs i matematik innehåller den totala kunskapsmängden M . Anna Lys, som läser kursen, har ingen kunskap i ämnet vid kursstart. Under kursens gång tillgodoser Anna sig kunskap kontinuerligt med en takt som vid varje tidpunkt är proportionell mot den kunskapsmängd som Anna har kvar att lära sig i kursen. Vi kallar proportionalitetskonstanten för k . Dessvärre glömmer Anna även kunskap, och det sker med en takt som vid varje tidpunkt är proportionell mot den mängd kunskap som Anna besitter. Här är proportionalitetskonstanten $3k/5$ (samma k som ovan). Två veckor efter kursstart är Anna i fas, vilket betyder att hennes kunskapsmängd just då är $M/4$.

Tentamen går åtta veckor efter kursstart och för att bli godkänd på den krävs en kunskapsnivå på $M/2$. Kommer Anna Lys, enligt denna modell, att klara tentamen?

4. a) Formulera och bevisa en valfri men viktig sats om integraler. Ge även en kort motivering till varför den är viktig. (0.4)

b) Beräkna integralerna

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+4x^2} dx \quad \text{och} \quad \int_0^1 (\arcsin x)^2 dx. \quad (0.6)$$

5. Ange ett närmevärde (på decimalform) till arean av det område i xy -planet som begränsas av x -axeln, kurvan $y = 1/x$, samt linjerna $x = 1$ och $x = 1.1$. Det absoluta felet får ej överstiga $0.5 \cdot 10^{-3}$.

6. Låt D vara det ändliga område i xy -planet som begränsas av linjen $y = x$ och parabeln $y = x^2$. Bestäm volymen av den kropp som uppstår då D roterar kring linjen $y = x$.

Lycka till!