1. För definition av derivata se läroboken sidan 206. Det gäller att

$$f'(x) = D\ln\Big((x+3)\sqrt{x^2+1}\Big) = D\Big(\ln(x+3) + +\tfrac{1}{2}\ln(x^2+1)\Big) = \frac{1}{x+3} + \frac{x}{x^2+1}.$$

2. Gränsvärdena blir

$$\lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-4x}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-(x^2-4x)}{x+\sqrt{x^2-4x}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{4x}{x+\sqrt{x^2-4x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{4}{1+\sqrt{1-\frac{4}{x}}} = \frac{4}{1+1} = 2,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{e^{4x}-1} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{3x}\cdot\frac{1}{\frac{e^{4x}-1}{4x}}\cdot\frac{3}{4} = 1\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{3}{4} = \frac{3}{4},$$

$$\lim_{x\to\infty} x\sin\tfrac{1}{x} = \left[t=\tfrac{1}{x}\right] = \lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t}\cdot\sin t = \lim_{t\to 0^+}\frac{\sin t}{t} = 1.$$

3. Vi börjar med att derivera, och får

$$f'(x) = \frac{(2x+4)(3x+3)-3(x^2+4x+7)}{9(x+1)^2} = \frac{3x^2+6x-9}{9(x+1)^2} = \frac{(x-1)(x+3)}{3(x+1)^2}, \quad x \neq -1,$$

med nollställena $x=-3$ och $x=1$ (funktionen och derivatan är ej definierad för $x=-1$). Teckentabellen blir (notera att nämnaren är strängt positiv)

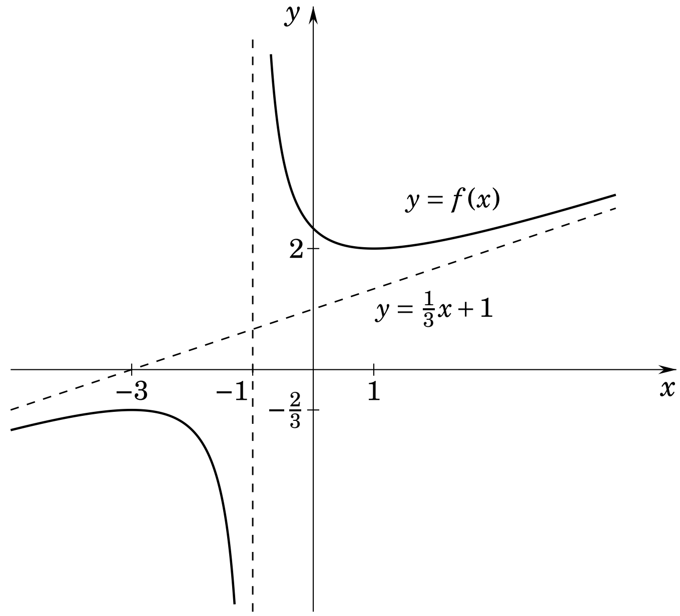
x		-3		-1		1	
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x+3$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$-\frac{2}{3}$	$\searrow$	$\nexists$	$\searrow$	2	$\nearrow$

Vi ser att vi får en lokal maximipunkt $x=-3$ med motsvarande lokala maximivärde $-2/3$, och en lokal minimipunkt $x=1$ med motsvarande lokala minimivärde 2.

Polynomdivision ger att $f(x) = \frac{1}{3}x+1+\frac{4}{3x+3}$, så det gäller att $f(x)-\left(\frac{1}{3}x+1\right) = \frac{4}{3x+3} \to 0$ då $x\to\pm\infty$. Således är $y=\frac{1}{3}x+1$ asymptot till funktionskurvan $y=f(x)$ både då $x\to\infty$ och $x\to-\infty$. (Alternativt tar vi fram denna asymptot med hjälp av algoritmen i läroboken.) Vi bestämmer slutligen ensidiga gränsvärden då $x\to-1$,

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \text{"}\frac{4}{0^-}\text{"} = -\infty, \qquad \lim_{x\to -1^+} f(x) = \text{"}\frac{4}{0^+}\text{"} = \infty,$$

och ser att $x=-1$ är en lodrät asymptot.



4. Efter substitutionen $w = z - 3i$ får vi den binomiska ekvationen $w^3 = 8i$, som vi lämpligen löser genom att skriva om på potensform. Med $w = |w|e^{i\theta}$ får vi

$$|w|^3 e^{i3\theta} = 8e^{i\pi/2} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} |w|^3 = 8 \\ 3\theta = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} |w| = 2 \\ \theta = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} k \end{cases}$$

där $k \in \mathbb{Z}$. Det är endast $k = 0, 1, 2$ som ger olika rötter, så dessa blir

$$w_0 = 2e^{i\pi/6} = \sqrt{3} + i, \qquad w_1 = 2e^{i5\pi/6} = -\sqrt{3} + i, \qquad w_2 = 2e^{i3\pi/2} = -2i.$$

Återgång till $z = w + 3i$ ger oss slutligen rötterna

$$z_0 = \sqrt{3} + 4i, \quad z_1 = -\sqrt{3} + 4i, \quad z_2 = i.$$

5. För Maclaurins formel se läroboken sidan 259. Eftersom

$$f(x) = (1+2x)^{3/2}, \quad f'(x) = 3(1+2x)^{1/2}, \quad f''(x) = 3(1+2x)^{-1/2},$$

så får vi

$$f(0) = 1, \qquad f'(0) = 3, \qquad \frac{f''(\theta x)}{2!} = \frac{3}{2}(1+2\theta x)^{-1/2},$$

och Maclaurinutvecklingen av ordning 2 blir

$$f(x) = 1 + 3x + \frac{3}{2}\frac{1}{(1+2\theta x)^{1/2}}x^2, \qquad 0 \le \theta \le 1.$$

Vi sätter $p(x) = 1 + 3x$. Då $-1/8 < x < 1/8$ gäller det att $-1/8 < \theta x < 1/8$, och vi får

$$|f(x) - p(x)| = \frac{3}{2}\frac{1}{(1+2\theta x)^{1/2}}x^2 \le \frac{3}{2}\frac{1}{\big(1+2\big(-\frac{1}{8}\big)\big)^{1/2}}x^2 = \sqrt{3}x^2 \le 2x^2.$$

6. Om vi betecknar längden av sidan av den kvadratiska bottenplattan med x och lådans höjd med y (i båda fallen i dm) så gäller det att materialkostnaden K blir

$$K = 3 \cdot x^2 + 4 \cdot 2 \cdot xy = 3x^2 + 8xy.$$

Volymen av lådan ges av $V = x^2 y$, så det gäller att $x^2 y = 6$, dvs. $y = 6/x^2$. Substitution av det sistnämnda i uttrycket för K ger oss följande funktion som skall minimeras:

$$K(x) = 3x^2 + \frac{48}{x}, \qquad x > 0.$$

Derivering ger $K'(x) = 6x - \frac{48}{x^2} = 6 \cdot \frac{x^3-8}{x^2}$, så den enda stationära punkten är $x = 2$. Teckenstudiet

x	0		2	
$K'(x)$		$-$	0	$+$
$K(x)$		$\searrow$	36	$\nearrow$

ger den minsta kostnaden 36 kr.

7. Eftersom enhetscirkeln ges av ekvationen $x^2 + y^2 = 1$ kan vi beskriva en godtycklig punkt P på den övre halvan med koordinaterna $\big(x, \sqrt{1-x^2}\big)$, $-1 \le x \le 1$. Längden av sträckan QR ges då av $1-x$, och längden av PQ av $\sqrt{1-x^2}$, så vi vill maximera funktionen

$$d(x) = 1 - x + \sqrt{1-x^2}, \qquad -1 \le x \le 1.$$

Derivering ger

$$d'(x) = -1 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-\sqrt{1-x^2} - x}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad -1 < x < 1,$$

och löser vi rotekvationen $-\sqrt{1-x^2} - x = 0$ får vi den enda roten $x = -1/\sqrt{2}$, vilken alltså är den enda stationära punkten. Från teckenstudiet

x	-1		$-1/\sqrt{2}$		1
$d'(x)$		$+$	0	$-$	
$d(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

ser vi att $x = -1/\sqrt{2}$ ger det största värdet, så punkten P skall ha koordinaterna $\big(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\big)$.

8. Maclaurinutveckling ger att

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{ax}\sin x - \ln(x+1)}{x^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\big(1 + ax + \frac{a^2}{2}x^2 + B_1(x)x^3\big)\big(x - \frac{1}{6}x^3 + B_2(x)x^4\big) - \big(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + B_3(x)x^4\big)}{x^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(a+\frac{1}{2})x^2 + (\frac{a^2}{2} - \frac{1}{6} - \frac{1}{3})x^3 + B_4(x)x^4}{x^3} = \lim_{x\to 0} \Big((a+\tfrac{1}{2})\tfrac{1}{x} + \tfrac{a^2}{2} - \tfrac{1}{2} + B_4(x)x \Big),$$

där samtliga $B_i(x)$ är begränsade i en omgivning av 0. För att gränsvärdet skall bli ändligt måste det i detta fall gälla att koefficienten $a + 1/2 = 0$, dvs. $a = -1/2$. Med detta värde insatt på a blir gränsvärdet

$$\lim_{x\to 0}\left(\left(-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\right)\tfrac{1}{x}+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^2}{2}-\tfrac{1}{2}+B_4(x)x\right)=\lim_{x\to 0}\left(-\tfrac{3}{8}+B_4(x)x\right)=-\tfrac{3}{8}.$$

9. Derivering ger att

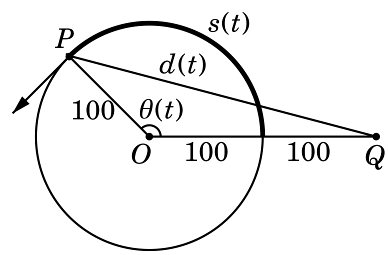
$$f'(x) = -2\sin 2x + a\sin x = -4\sin x\cos x + a\sin x = 4\sin x\left(\tfrac{a}{4}-\cos x\right).$$

Vi noterar först att $\sin x > 0$ i $]0,\pi[$. Vidare, eftersom $\cos x$ antar värdena $]-1,1[$ i det aktuella intervallet, gäller det att faktorn $\frac{a}{4}-\cos x$ saknar nollställen precis då $|a/4| \geq 1$, dvs. precis då $|a| \geq 4$. Då denna faktor saknar nollställen i $]0,\pi[$ följer det att den antingen är positiv eller negativ där. Sammantaget gäller det alltså för dessa värden på a at f är strängt monoton i $]0,\pi[$, och således att f antar varje funktionsvärde högst en gång.

I fallet då $|a| < 4$ har faktorn $\frac{a}{4}-\cos x$ ett nollställe i intervallet, vilket innebär att denna får en teckenväxling och att f således ej är strängt monoton. I detta fall finns det således funktionsvärden som upprepas.

Svaret är de a-värden som uppfyller att $|a| \geq 4$.

10. Beteckningar enligt figur. Låt $d(t)$ vara avståndet (i meter) mellan löparen och åskådaren, och låt $\theta(t)$ beteckna storleken i radianer av vinkeln POQ, båda givna som funktioner av tiden t sekunder. Cosinussatsen ger att



$$d(t)^2 = 100^2 + 200^2 - 2\cdot 100\cdot 200\cos\theta(t),$$

och ledvis derivering ger att

$$2d(t)d'(t) = 4\cdot 10^4\cdot\theta'(t)\sin\theta(t) \quad\Leftrightarrow\quad d'(t) = \frac{2\cdot 10^4\cdot\theta'(t)\sin\theta(t)}{d(t)}. \qquad (1)$$

Vidare gäller det att, med $s(t)$ som längden av cirkelbågen i figuren, att $s(t) = 100\theta(t)$, och vi får $\theta'(t) = s'(t)/100 = v(t)/100$, där $v(t)$ är löparens fart vid tiden t. Vid den sökta tidpunkten t_0 gäller det att $d(t_0) = 100\sqrt{7}$, och cosinussatsen ger att

$$(100\sqrt{7})^2 = 100^2 + 200^2 - 2\cdot 100\cdot 200\cos\theta(t_0) \quad\Leftrightarrow\quad \cos\theta(t_0) = -\tfrac{1}{2},$$

vilket ger oss att $\theta(t_0) = 2\pi/3$ eller $\theta(t_0) = 4\pi/3$, och således att $\sin\theta(t_0) = \pm\sqrt{3}/2$. Vidare har vi att $\theta'(t_0) = v(t_0)/100 = 5/100 = 1/20$. Insättning av $t = t_0$ i sambandet (1) ger oss slutligen

$$d'(t_0) = \frac{2\cdot 10^4\cdot\theta'(t_0)\sin\theta(t_0)}{d(t_0)} = \pm\frac{2\cdot 10^4\cdot\frac{1}{20}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{100\sqrt{7}} = \pm\frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{7}}.$$

Sammanfattningsvis gäller det alltså att löparen avlägsnar sig, alternativt närmar sig, åskådaren med farten $5\sqrt{3}/\sqrt{7}$ m/s.