LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

LÖSNINGAR
ENDIMENSIONELL ANALYS A2
2018–01–11 kl 14–19

1. Vi börjar med att derivera, och får

$$f'(x) = \frac{(4x-1)(x-1) - (2x^2 - x + 1) \cdot 1}{(x-1)^2} = 2\frac{x(x-2)}{(x-1)^2},$$

med nollställena $x = 0$ och $x = 2$ (funktionen är ej definierad för $x = 1$). Teckentabellen blir

x		0		1		2	
x	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x-1)^2$	$+$	$+$	$+$	0	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$\nexists$	$\searrow$	7	$\nearrow$

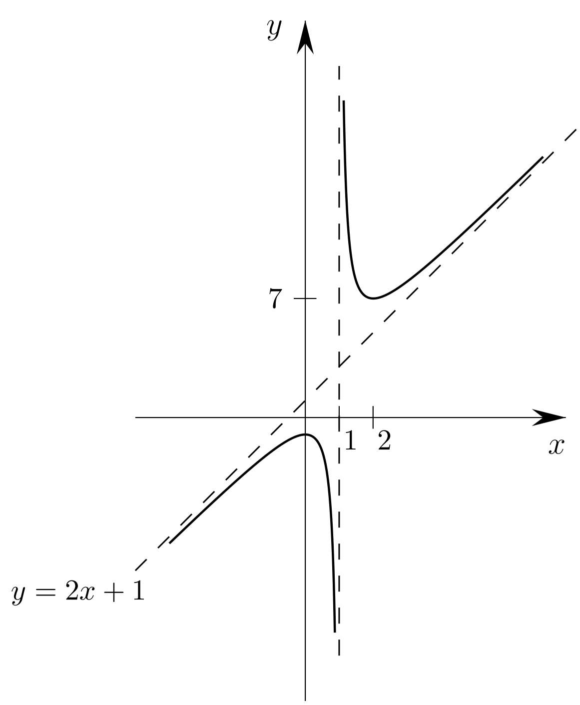
Vi ser att vi får en lokal maximipunkt $x = 0$ med värdet -1 respektive en lokal minimipunkt $x = 2$ med värdet 7.

Polynomdivision ger att $f(x) = 2x + 1 + \frac{2}{x-1}$, och eftersom $\frac{2}{x-1} \to 0$ då $x \to \pm\infty$ följer det att linjen $y = 2x+1$ är asymptot till $y = f(x)$ både då $x \to \infty$ och $x \to -\infty$. (Det följer då speciellt att $f(x) \to \infty$ då $x \to \infty$, respektive att $f(x) \to -\infty$ då $x \to -\infty$.) Vi bestämmer också de ensidiga gränsvärdena då $x \to 1$:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \text{"}\frac{2}{0^-}\text{"} = -\infty, \qquad \lim_{x \to 1^+} f(x) = \text{"}\frac{2}{0^+}\text{"} = \infty.$$

Linjen $x = 1$ är således en lodrät asymptot.

Vi är nu redo att rita grafen:



2. a) Det gäller att

$$\lim_{x\to\infty}\left(\ln(2+3x)-\ln x\right)=\lim_{x\to\infty}\ln\tfrac{2+3x}{x}=\lim_{x\to\infty}\ln\left(\tfrac{2}{x}+3\right)=\ln 3.$$

b) Vi får

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{(x-1)(x+1)}=[\,t=x-1\,]=$$

$$=\lim_{t\to 0}\left(\frac{\ln(t+1)}{t}\cdot\frac{1}{t+2}\right)=1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

c) Förlängning med konjugatuttrycket ger

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-3x}-\sqrt{x^2+2x}\right)\left(\sqrt{x^2-3x}+\sqrt{x^2+2x}\right)}{\sqrt{x^2-3x}+\sqrt{x^2+2x}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-3x-(x^2+2x)}{\sqrt{x^2-3x}+\sqrt{x^2+2x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-5x}{\sqrt{x^2-3x}+\sqrt{x^2+2x}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x}\cdot\frac{-5}{\sqrt{1-\frac{3}{x}}+\sqrt{1+\frac{2}{x}}}\right)=-\frac{5}{2}.$$

d) Samma räkningar som i c), fast nu med $\sqrt{x^2}=-x$ (då $x<0$), ger

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-3x}-\sqrt{x^2+2x}\right)\left(\sqrt{x^2-3x}+\sqrt{x^2+2x}\right)}{\sqrt{x^2-3x}+\sqrt{x^2+2x}}=\ldots=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{-x}\cdot\frac{-5}{\sqrt{1-\frac{3}{x}}+\sqrt{1+\frac{2}{x}}}\right)=\frac{5}{2}.$$

e) Det gäller att

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{\cos 2x}{\ln x}=\text{„}\,\frac{\cos 2}{0^+}\,\text{”}=-\infty,$$

eftersom $\cos 2<0$.

3. a) Omskrivning på polär form, med $z=|z|e^{i\theta}$, ger

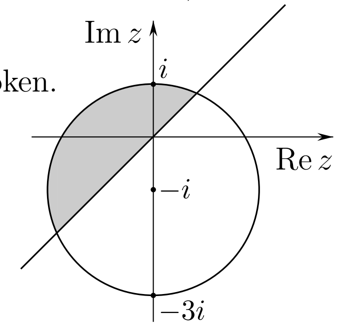
$$z^4=-2+2\sqrt{3}i\quad\Leftrightarrow\quad|z|^4e^{i4\theta}=4e^{i\left(\frac{2\pi}{3}+2\pi k\right)},\quad k=0,1,2,3$$

$$\Leftrightarrow\quad\begin{cases}|z|^4=4\\ 4\theta=\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\quad k=0,1,2,3\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}|z|=\sqrt{2}\\ \theta=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}k,\quad k=0,1,2,3,\end{cases}$$

vilket ger oss de fyra rötterna $z_k=\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}k\right)}$, $k=0,1,2,3$. Omskrivna på rektangulär form är dessa

$$\pm\left(\sqrt{\tfrac{3}{2}}+\tfrac{1}{\sqrt{2}}i\right)\qquad\text{respektive}\qquad\pm\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}-\sqrt{\tfrac{3}{2}}i\right).$$

b) Det rör sig om alla punkter innanför eller på cirkeln med medelpunkt $-i$ och radie 2 som samtidigt ligger ovanför eller på linjen $\operatorname{Im} z = \operatorname{Re} z$ (se figur nedan).



4. För Maclaurins formel med Lagranges restterm se sidan 259 i läroboken.

Derivering ger att

$$f(x) = \sqrt{1+x} = \underbrace{1 + \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}x^2}_{=p_2(x)} + \tfrac{1}{16}\frac{1}{(1+\theta x)^{5/2}}x^3,$$

för något θ, $0 < \theta < 1$. För $|x| < \frac{1}{2}$ gäller det då att

$$|f(x) - p_2(x)| = \tfrac{1}{16}\tfrac{1}{(1+\theta x)^{5/2}}|x|^3 < \tfrac{1}{16}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^{5/2}}\left(\tfrac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{16\sqrt{2}} < \frac{1}{20} = 5 \cdot 10^{-2}.$$

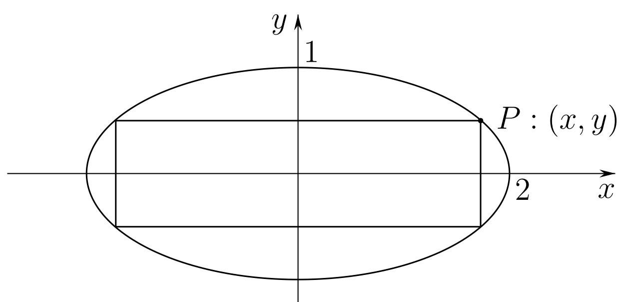
För att ta fram Maclaurinpolynomet $p_4(x)$ av ordning 4 till $g(x) = \sqrt{1 + x\sin x}$ kan vi använda entydighetssatsen i kombination med utvecklingen av f ovan. Låt $B_i(x)$ beteckna funktioner som är begränsade nära $x = 0$. Genom att först utveckla $\sin x$ får vi

$$g(x) = \sqrt{1 + x\sin x} = \sqrt{1 + \left(x^2 - \tfrac{1}{6}x^4 + B_1(x)x^6\right)} =$$
$$= 1 + \tfrac{1}{2}\left(x^2 - \tfrac{1}{6}x^4 + B_1(x)x^6\right) - \tfrac{1}{8}\left(x^2 - \tfrac{1}{6}x^4 + B_1(x)x^6\right)^2 + B_2(x)x^6 =$$
$$= 1 + \tfrac{1}{2}x^2 - \left(\tfrac{1}{12} + \tfrac{1}{8}\right)x^4 + B_3(x)x^6 = 1 + \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{5}{24}x^4 + B_3(x)x^6.$$

Det sökta Maclaurinpolynomet är således $p_4(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{24}x^4$.

5. a) Se läroboken sidan 230–232.

b) Antag att punkten $P : (x, y)$ är rektangelns hörn i den första kvadranten (se figuren).



Eftersom P ligger på ellipsen gäller det att $y = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$, och rektangelns area ges av funktionen

$$A(x) = 4xy = 4x\sqrt{1 - \tfrac{x^2}{4}}, \qquad 0 \le x \le 2.$$

Derivatan blir

$$A'(x) = 4\sqrt{1 - \tfrac{x^2}{4}} + 4x\frac{1}{2\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}} \cdot \left(-\frac{x}{2}\right) = \frac{4 - 2x^2}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}},$$

vilket i intervallet $[0, 2]$ har det enda nollstället $x = \sqrt{2}$, och t.ex. ett teckenstudium av derivatan visar att detta svarar mot ett största värde. Den sökta maximala arean är alltså $A(\sqrt{2}) = 4$.

6. a) Se läroboken sidan 221.

b) Både $\theta = \theta(t)$ och $\alpha = \alpha(t)$ kan ses som funktioner av tiden t. Med sinussatsen på triangeln OPQ får vi

$$\frac{\sin\theta(t)}{5} = \frac{\sin\alpha(t)}{2},$$

och vid den givna tidpunkten t_0 gäller det att $\theta(t_0) = \pi/4$, vilket innebär att $\sin\theta(t_0) = 1/\sqrt{2}$, och således att $\sin\alpha(t_0) = \frac{\sqrt{2}}{5}$. Implicit derivering, med avseende på t, ger

$$\frac{\cos\theta(t)}{5}\theta'(t) = \frac{\cos\alpha(t)}{2}\alpha'(t),$$

dvs.

$$\alpha'(t) = \frac{2}{5}\frac{\cos\theta(t)}{\cos\alpha(t)}\theta'(t) = \frac{2}{5}\frac{\cos\theta(t)}{\sqrt{1-\sin^2\alpha(t)}}\theta'(t),$$

och med $t = t_0$ följer det slutligen att

$$\alpha'(t_0) = \frac{2}{5}\frac{\cos\frac{\pi}{4}}{\sqrt{1-\sin^2\alpha(t_0)}}\theta'(t_0) = \frac{2}{5}\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{1-\frac{2}{25}}}\cdot 10 = 10\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{23}}.$$

Vinkeln α ändras alltså med hastigheten $10\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{23}}$ radianer per sekund.