LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

LÖSNINGAR
ENDIMENSIONELL ANALYS A2
2017–01–13 kl 8–13

1. a) Vi bryter ut dominerande termer i täljare och nämnare, och får

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - 2e^x}{e^{x+1} + 3\ln x} = \lim_{x\to\infty} \underbrace{\frac{e^x}{e^x}}_{=1} \cdot \frac{\frac{x^3}{e^x} - 2}{e + 3\frac{\ln x}{e^x}} = \frac{0-2}{e + 3\cdot 0} = -\frac{2}{e}.$$

b) Här kan vi exempelvis använda variabelbytet $t = x - 2$, vilket ger

$$\lim_{x\to 2} \frac{2-x}{x^2 - x - 2} = \left[\begin{array}{l} t = x-2 \Leftrightarrow x = t+2, \\ x \to 2 \Leftrightarrow t \to 0 \end{array} \right] =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{-t}{(t+2)^2 - (t+2) - 2} = \lim_{t\to 0} \frac{-t}{t^2 + 3t} = \lim_{t\to 0} \frac{-1}{t+3} = \frac{-1}{0+3} = -\frac{1}{3}.$$

Alternativt faktoriserar man nämnaren och stryker den gemensamma faktorn.

c) Serien är geometrisk med kvot $1/4$, och därmed konvergent ($-1 < 1/4 < 1$). Seriens summa blir

$$\sum_{k=2}^{\infty} \left(\tfrac{1}{4}\right)^k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} \left(\tfrac{1}{4}\right)^k = \lim_{n\to\infty} \left(\tfrac{1}{4}\right)^2 \sum_{k=0}^{n-2} \left(\tfrac{1}{4}\right)^k =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{16} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-2+1}}{1 - \frac{1}{4}} = \tfrac{1}{16} \cdot \frac{1-0}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{12}.$$

2. a) Kvadratkomplettering ger

$$z^2 - (4+2i)z + 5 + \tfrac{11}{2}i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \big(\underbrace{z - (2+i)}_{=w}\big)^2 - (2+i)^2 + 5 + \tfrac{11}{2}i = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad w^2 = -2 - \tfrac{3}{2}i,$$

och sätter vi $w = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) så får vi

$$a^2 - b^2 + 2abi = -2 - \tfrac{3}{2}i \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} a^2 - b^2 = -2, \\ 2ab = -\frac{3}{2}. \end{cases}$$

Detta system, som förslagsvis löses med utnyttjande av hjälpekvationen $a^2 + b^2 = \left| -2 - \frac{3}{2}i \right| = \frac{5}{2}$, har lösningarna $(a, b) = \pm\frac{1}{2}(1, -3)$. (Observera att systemets andra ekvation ger att a och b har *olika* tecken.) Återgång till z ger slutligen rötterna

$$z_1 - (2+i) = \tfrac{1}{2} - \tfrac{3}{2}i \qquad \Leftrightarrow \qquad z_1 = \tfrac{5}{2} - \tfrac{1}{2}i,$$

$$z_2 - (2+i) = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{2}i \qquad \Leftrightarrow \qquad z_2 = \tfrac{3}{2} + \tfrac{5}{2}i.$$

b) Se läroboken sidan 93.

3. Vi börjar med att derivera, och får

$$f'(x) = \frac{1}{1+(2x)^2}\cdot 2 - \frac{1}{x+\frac{1}{2}} = \frac{2\left(x+\frac{1}{2}\right)-(1+4x^2)}{(1+4x^2)\left(x+\frac{1}{2}\right)} =$$

$$= \frac{-4x^2+2x}{(1+4x^2)\left(x+\frac{1}{2}\right)} = \frac{-4x\left(x-\frac{1}{2}\right)}{(1+4x^2)\left(x+\frac{1}{2}\right)}, \quad x > -\tfrac{1}{2},$$

med nollställena $x = 0$ och $x = 1/2$. Teckentabellen blir (notera att nämnaren är strängt positiv)

x	$-1/2$		0		$1/2$	
$-4x$	$\nexists$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$x-1/2$	$\nexists$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$\nexists$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nexists$	$\searrow$	$\ln 2$	$\nearrow$	$\pi/4$	$\searrow$

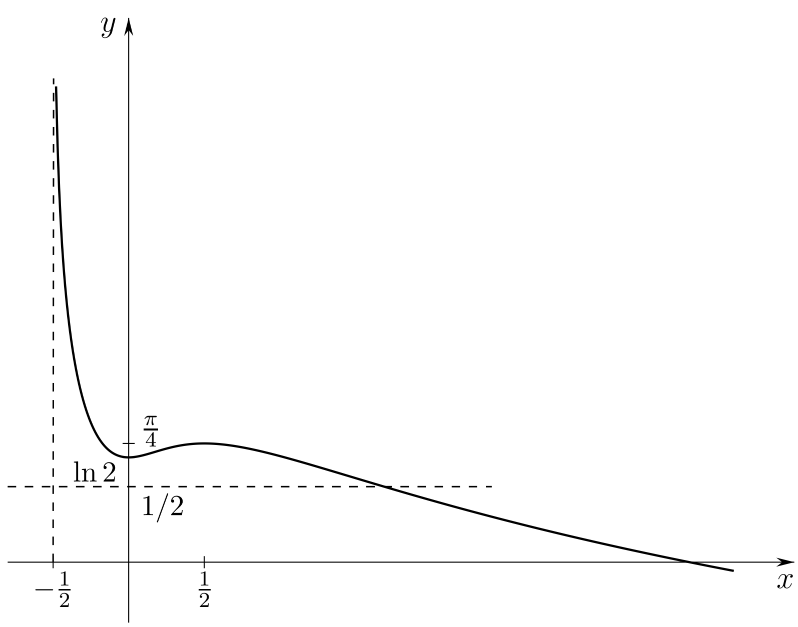
Vi ser att vi får en lokal minimipunkt $x = 0$ med motsvarande lokala minimivärde $-\ln(1/2) = \ln 2$, samt en lokal maximipunkt $x = 1/2$ med motsvarande lokala maximivärde $\arctan 1 = \pi/4$.

Vi beräknar därefter relevanta gränsvärden:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\arctan(2x) - \ln\left(x+\tfrac{1}{2}\right)\right) = ''\,\frac{\pi}{2} - \infty\,'' = -\infty,$$

$$\lim_{x\to -1/2^+}\left(\arctan(2x) - \ln\left(x+\tfrac{1}{2}\right)\right) = ''\,-\frac{\pi}{4} + \infty\,'' = \infty.$$

Nu kan vi skissera grafen:



Värdemängden ges av $V_f = \mathbb{R}$.

Vi noterar slutligen att $1/2 = \ln e^{1/2} < \ln 4^{1/2} = \ln 2$, och i figuren ($f$ är kontinuerlig) kan vi då avläsa att ekvationen $f(x) = 1/2$ har precis en lösning.

4. a) För att f skall vara deriverbar i 0 är det nödvändigt att funktionen är kontinuerlig där, dvs. det måste gälla att $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$. Själva gränsvärdet existerar precis då vänster- och högergränsvärden är lika, och eftersom

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (3x+2) = 2 \quad \text{och} \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (ae^{2x} + b) = a + b,$$

så måste det gälla att $a + b = 2$. (Villkoret att gränsvärdet skall vara lika med funktionsvärdet i 0 uppfylls i detta fall automatiskt.)

Funktionen f är deriverbar i 0 precis då höger- och vänsterderivatorna är lika i punkten. Derivering av f i övriga punkter ger

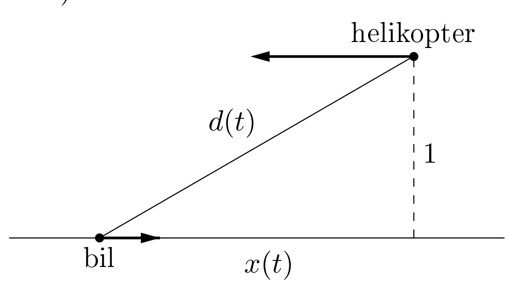
$$f'(x) = \begin{cases} 2ae^{2x}, & x > 0, \\ 3, & x < 0, \end{cases}$$

och eftersom f är kontinuerlig i 0 så gäller det att

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0+} 2ae^{2x} = 2ae^0 = 2a \quad \text{och} \quad f'_-(0) = \lim_{x\to 0-} 3 = 3.$$

Vi drar därför slutsatsen att $2a = 3$, dvs. att $a = 3/2$. Kombinerar vi detta med det tidigare villkoret $a + b = 2$ får vi slutligen $b = 1/2$.

b) Problemet kan lösas med implicit derivering. Låt $d(t)$ beteckna avståndet mellan helikoptern och bilen, och låt vidare $x(t)$ beteckna avståndet i horisontell led (i km vid tiden t timmar).



Enligt Pythagoras sats är $x(t)^2 + 1^2 = d(t)^2$, och derivering ger

$$2x(t)x'(t) + 0 = 2d(t)d'(t) \qquad \Leftrightarrow \qquad x'(t) = \frac{d(t)d'(t)}{x(t)}.$$

Vid den aktuella tidpunkten $t = t_0$ gäller det att $d(t_0) = 2$, $d'(t_0) = -250$ och $x(t_0) = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$, och det följer således att

$$x'(t_0) = \frac{d(t_0)d'(t_0)}{x(t_0)} = \frac{2 \cdot (-250)}{\sqrt{3}} = -\frac{500}{\sqrt{3}}.$$

Eftersom $|x'(t_0)| = \frac{500}{\sqrt{3}}$ svarar mot farten med vilken det horisontella avståndet minskar, så ges bilens fart av $\frac{500}{\sqrt{3}} - 200$ km /tim ≈ 89 km/tim.

5. a) Maclaurinutveckling av funktionen $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ ger

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \tfrac{1}{2}x + \tfrac{3}{8}\frac{1}{(1+\theta x)^{5/2}}x^2, \quad 0 \le \theta \le 1,$$

och då $|x| \le 1/4$ gäller det att $-\frac{1}{4} \le \theta x \le \frac{1}{4}$. Med $p(x) = 1 - \frac{1}{2}x$ får vi nu

$$\left|\frac{1}{\sqrt{1+x}} - p(x)\right| = \left|1 - \tfrac{1}{2}x + \tfrac{3}{8}\frac{1}{(1+\theta x)^{5/2}}x^2 - \left(1 - \tfrac{1}{2}x\right)\right| =$$

$$= \tfrac{3}{8}\frac{1}{(1+\theta x)^{5/2}}x^2 \le \tfrac{3}{8}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}\right)^{5/2}}x^2 = \tfrac{4}{3\sqrt{3}}x^2 \le x^2.$$

b) Av Maclaurinutvecklingen i a) följer det att $\frac{1}{\sqrt{1+x}} \approx 1 - \frac{1}{2}x$ för små värden på x. Med substitutionen $x = -v^2/c^2$ kan vi därför dra slutsatsen att

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \approx 1 + \tfrac{1}{2}\tfrac{v^2}{c^2}$$

då v är liten relativt c. Det följer slutligen att

$$K = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right) m_0c^2 \approx \left(1 + \tfrac{1}{2}\tfrac{v^2}{c^2} - 1\right) m_0c^2 = \tfrac{1}{2}m_0v^2.$$

6. Vi börjar med att beräkna skärningspunkten Q:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = r^2, \\ (x-1)^2 + y^2 = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = r^2, \\ (x-1)^2 - x^2 = 1 - r^2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = r^2, \\ x = \frac{1}{2}r^2, \end{cases}$$

och insättning av $x = \frac{1}{2}r^2$ i den första ekvationen ger oss $Q : \left(\frac{1}{2}r^2, r\sqrt{1-\frac{1}{4}r^2}\right)$ (vi söker punkten i den första kvadranten). Nu kan vi ta fram en ekvation för linjen l,

$$y = \frac{2\left(\sqrt{1-\frac{1}{4}r^2} - 1\right)}{r}x + r,$$

och genom att sätta $y = 0$ kan vi beräkna x-koordinaten för punkten R:

$$x = \tfrac{1}{2}\frac{r^2}{1 - \sqrt{1-\frac{1}{4}r^2}}.$$

För att beräkna gränsläget av R beräknar vi slutligen gränsvärdet då $r \to 0^+$. En metod är att förlänga med nämnarens konjugatuttryck, en annan är att utnyttja Maclaurinutveckling (funktionen B nedan är begränsad nära 0):

$$\lim_{r\to 0^+} \tfrac{1}{2}\frac{r^2}{1-\sqrt{1-\frac{1}{4}r^2}} = \lim_{r\to 0^+} \tfrac{1}{2}\frac{r^2}{1 - \left(1 - \frac{1}{8}r^2 + B(r)r^4\right)} =$$

$$= \lim_{r\to 0^+} \tfrac{1}{2}\frac{1}{\frac{1}{8} - B(r)r^2} = \tfrac{1}{2}\frac{1}{\frac{1}{8} - 0} = 4.$$

Gränsläget för punkten R är alltså $(4, 0)$.