1. a) Eftersom $\sin(1/x) \to \sin 0 = 0$ och $e^{-x} \to 0$ då $x \to \infty$, så dominerar x^2-termerna i täljare och nämnare, och vi får

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 + e^{-x}}{\sin(1/x) - 2x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{3 + \frac{e^{-x}}{x^2}}{\frac{\sin(1/x)}{x^2} - 2} = 1 \cdot \frac{3+0}{0-2} = -\frac{3}{2}.$$

b) Eftersom täljaren har 2 som nollställe, så faktoriserar vi denna och får

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 7x + 10}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x-5)}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x-5) = 2 - 5 = -3.$$

Alternativt utför man först ett lämpligt variabelbyte, t.ex. $t = x - 2$.

c) Genom att "skjuta in" en faktor x, så kan vi utnyttja standardgränsvärden enligt

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan 3x}{e^{2x} - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{\tan 3x}{3x} \cdot \frac{2x}{e^{2x}-1} \cdot \frac{3}{2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{1}{\cos 3x} \cdot \frac{1}{\frac{e^{2x}-1}{2x}} \cdot \frac{3}{2} = 1 \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2}.$$

d) Med x i både täljare och nämnare är omskrivning via $e^{\ln\cdots}$ en lämplig strategi:

$$\lim_{x\to\infty} x^{2/\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} e^{\ln x^{2/\sqrt{x}}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{2}{\sqrt{x}}\ln x} = \lim_{x\to\infty} e^{2\cdot\frac{\ln x}{\sqrt{x}}} = e^0 = 1.$$

2. a) Kvadratkomplettering ger

$$z^2 - (2-4i)z - 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \big(\underbrace{z - (1-2i)}_{=w}\big)^2 - (1-2i)^2 - 6 = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad w^2 = 3 - 4i,$$

och sätter vi $w = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ så får vi

$$a^2 - b^2 + 2abi = 3 - 4i \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a^2 - b^2 = 3, \\ 2ab = -4. \end{cases}$$

Detta system, som förslagsvis löses med utnyttjande av hjälpekvationen $a^2+b^2 = |3-4i| = 5$, har lösningarna $(a,b) = \pm(2,-1)$. (Observera att systemets andra ekvation ger att a och b har *olika* tecken.) Återgång till z ger slutligen rötterna

$$z_1 - (1-2i) = 2 - i \quad \Leftrightarrow \quad z_1 = 3 - 3i,$$
$$z_2 - (1-2i) = -2 + i \quad \Leftrightarrow \quad z_2 = -1 - i.$$

b) Efter ledvis division med i, där högerledet förenklas till $\frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = -i$, så får vi den binomiska ekvationen

$$z^3 = -i,$$

som vi lämpligen löser genom att skriva om på polär form. Sätter vi $z = |z|e^{i\theta}$ så får vi

$$|z|^3 e^{i3\theta} = e^{-i\pi/2} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} |z|^3 = 1 \\ 3\theta = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} |z| = 1 \\ \theta = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}k \end{cases},$$

där $k \in \mathbb{Z}$. Det är endast $k = 0, 1, 2$ som ger olika rötter, så dessa blir

$$z_0 = e^{-i\pi/6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i, \qquad z_1 = e^{i\pi/2} = i, \qquad z_2 = e^{i7\pi/6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i.$$

c) Vridning vinkeln $\pi/3$ och förstoring faktorn 3 svarar mot multiplikation med det komplexa talet $3e^{i\pi/3} = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$. Det sökta talet blir således

$$(1-i)\big(\tfrac{3}{2} + \tfrac{3\sqrt{3}}{2}i\big) = \tfrac{3}{2}\big(1+\sqrt{3}\big) + \tfrac{3}{2}\big(-1+\sqrt{3}\big)i.$$

3. a) Derivering ger $f'(x) = \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x}$, och (t.ex.) med hjälp av enpunktsformeln får vi ekvationerna till tangenten respektive normalen:

$$y - f(e) = f'(e)(x-e) \quad \Leftrightarrow \quad y - 0 = \tfrac{1}{e}(x-e) \quad \Leftrightarrow \quad y = \tfrac{1}{e}x - 1,$$

$$y - f(e) = -\tfrac{1}{f'(e)}(x-e) \quad \Leftrightarrow \quad y - 0 = -e(x-e) \quad \Leftrightarrow \quad y = -ex + e^2.$$

b) Se läroboken sidan 230.

c) Se läroboken sidan 232.

4. Vi börjar med att derivera, och får

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1 + \big(\frac{x}{x+1}\big)^2} \cdot \frac{1\cdot(x+1) - x\cdot 1}{(x+1)^2} = 1 - \frac{1}{1 + \frac{x^2}{(x+1)^2}} \cdot \frac{1}{(x+1)^2} =$$

$$= 1 - \frac{1}{(x+1)^2 + x^2} = \frac{(x+1)^2 + x^2 - 1}{(x+1)^2 + x^2} = \frac{2x(x+1)}{(x+1)^2 + x^2}, \quad x \neq -1,$$

med enda nollstället $x = 0$ (funktionen är ej definierad för $x = -1$). Teckentabellen blir (notera att nämnaren är strängt positiv)

x		-1		0	
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\nexists$	$\searrow$	0	$\nearrow$

Vi ser att vi får en lokal minimipunkt $x = 0$ med motsvarande lokala minimivärde 0.

Eftersom $\frac{x}{x+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{x}} \to 1$ både då $x \to \infty$ och $x \to -\infty$ så följer det att

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - \left(x - \tfrac{\pi}{4}\right)\right) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\tfrac{\pi}{4} - \arctan\left(\tfrac{x}{x+1}\right)\right) = 0,$$

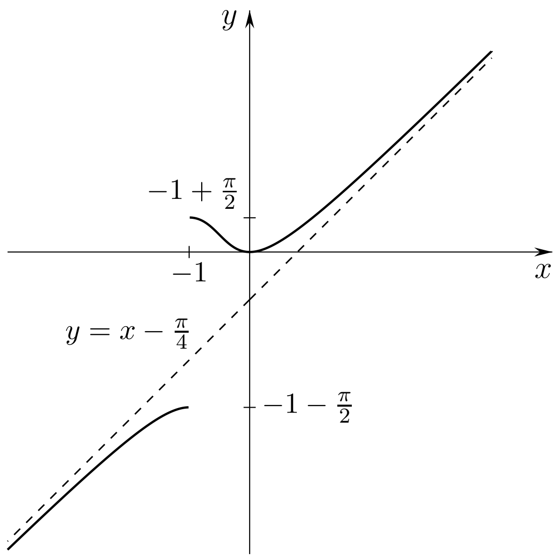
och således är $y = x - \frac{\pi}{4}$ sned asymptot både då $x \to \infty$ och $x \to -\infty$. (Alternativt tar vi fram denna asymptot med hjälp av algoritmen i läroboken.) Vi bestämmer slutligen ensidiga gränsvärden då $x \to -1$:

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \text{"} - 1 - \arctan(\infty)\text{"} = -1 - \tfrac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \text{"} - 1 - \arctan(-\infty)\text{"} = -1 + \tfrac{\pi}{2}.$$

Då dessa gränsvärden är ändliga följer det speciellt att lodräta asymptoter saknas.

Vi är nu redo att rita grafen:



5. a) Vi Maclaurinutvecklar först funktionerna e^{-2x^2}, $\cos 2x$ och $\sin x$:

$$e^x = 1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 + B_1(x)x^3 \quad \Rightarrow \quad e^{-2x^2} = 1 - 2x^2 + 2x^4 + B_2(x)x^6,$$

$$\cos x = 1 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{24}x^4 + B_3(x)x^6 \quad \Rightarrow \quad \cos 2x = 1 - 2x^2 + \tfrac{2}{3}x^4 + B_4(x)x^6,$$

$$\sin x = x - \tfrac{1}{6}x^3 + B_5(x)x^5.$$

(Samtliga funktioner $B_i(x)$ ovan och nedan antas vara begränsade nära $x = 0$.) Gränsvärdet blir nu

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - 2x^2 + 2x^4 + B_2(x)x^6 - (1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + B_4(x)x^6)}{x(x - \frac{1}{6}x^3 + B_5(x)x^5 - x)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{4}{3}x^4 + B_6(x)x^6}{-\frac{1}{6}x^4 + B_5(x)x^6} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{4}{3} + B_6(x)x^2}{-\frac{1}{6} + B_5(x)x^2} = \frac{\frac{4}{3} + 0}{-\frac{1}{6} + 0} = -8.$$

b) Eftersom

$$f(x) = \frac{1}{\left(1+\frac{x}{R}\right)^2}, \quad f'(x) = -\frac{2}{R\left(1+\frac{x}{R}\right)^3}, \quad f''(x) = \frac{6}{R^2\left(1+\frac{x}{R}\right)^4},$$

så får vi

$$f(0) = 1, \qquad f'(0) = -\frac{2}{R}, \qquad \frac{f''(\theta x)}{2!} = \frac{3}{R^2\left(1+\frac{\theta x}{R}\right)^4},$$

och Maclaurinutvecklingen av ordning 2 blir

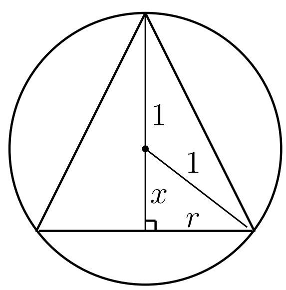
$$f(x) = \underbrace{1 - \tfrac{2}{R}x}_{=p_1(x)} + \frac{3}{R^2\left(1+\frac{\theta x}{R}\right)^4}x^2, \qquad 0 \le \theta \le 1.$$

Då $0 \le x \le 10^4$ gäller det även att $0 \le \theta x \le 10^4$, och felet blir

$$|f(x) - p_1(x)| = \frac{3}{R^2\left(1+\frac{\theta x}{R}\right)^4}x^2 \le$$

$$\le \frac{3}{R^2\left(1+0\right)^4}(10^4)^2 = \frac{3\cdot 10^8}{(6.4\cdot 10^6)^2} = \underbrace{\frac{30}{(6.4)^2}}_{<1}\cdot 10^{-5} < 10^{-5}.$$

6. Vi inför beteckningar enligt figuren, som visar situationen "från sidan" (dvs. i ett plan innehållande konens spets och klotets medelpunkt):



Konens volym ges av

$$V = \tfrac{\pi}{3}r^2(1+x),$$

och kombinerar vi detta med Pythagoras sats, $x^2+r^2 = 1$, så kan vi uttrycka volymen som en funktion av x enligt

$$V(x) = \tfrac{\pi}{3}(1-x^2)(1+x) = \tfrac{\pi}{3}(-x^3 - x^2 + x + 1), \qquad -1 < x < 1.$$

(Det är dock, med argumentation, möjligt att direkt utesluta intervallet $-1 < x < 0$.)

Derivatan av denna funktion ges av

$$V'(x) = \tfrac{\pi}{3}(-3x^2 - 2x + 1) = -\pi\left(x - \tfrac{1}{3}\right)(x+1),$$

där det enda intressanta nollstället är $x = 1/3$. Teckenstudium, eller motsvarande, visar att detta nollställe är en global maximipunkt för V, så den största volymen är $V(1/3) = 32\pi/81$.