

Lösningarna ska vara försedda med ordentliga motiveringar. Varje uppgift kan som mest ge 3 poäng.

Godkäntdel

För att bli godkänd krävs dels högst en uppgift med 0 poäng av dessa sex uppgifter, dels minst 9 poäng av 18 möjliga.

1. Beräkna gränsvärdena

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^x - x2^x + \ln x}{2x^{15} - 3^{x+1}}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{3x}, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} e^{\frac{4}{\ln x}}.$$

2. Ange ett argument för det komplexa talet

$$\frac{(1+i)(\sqrt{3}-i)}{-2+2\sqrt{3}i}.$$

Rita sedan ut i det komplexa talplanet de z som uppfyller

$$\begin{cases} |z - 2 - i| \leq 1 \\ \operatorname{Im} z \geq 1 \end{cases}.$$

3. Definiera vad som menas med Maclaurinpolynomet av en funktion f av ordning n . Använd sedan Maclaurinutveckling för att beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2 + 1) - x \sin x}{x^4}.$$

4. Rita grafen till funktionen $f(x) = \frac{e^{1/x}}{x^2}$. Ange speciellt eventuella lokala extrempunkter och asymptoter.
5. Använd derivatans definition för att härleda derivatan av funktionen $f(x) = 1/x^2$. Bestäm även konstanterna a och b så att funktionen

$$g(x) = \begin{cases} 1/x^2 & 0 < x \leq 1 \\ \ln(x^a) + b & 1 < x, \end{cases}$$

blir deriverbar i $x = 1$.

6. För vilka värden på x gäller det att serien

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{x^k}$$

är konvergent? För vilka värden på x blir denna series summa lika med 1?

Överbetygsdel

Om du klarat föregående del har du chans på överbetyg. För att få betyg 4 krävs minst 4 poäng på denna del. För betyg 5 krävs minst 7 poäng.

7. Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{2}{x^2 - 2x} - \frac{4}{x^2 - 4} \right).$$

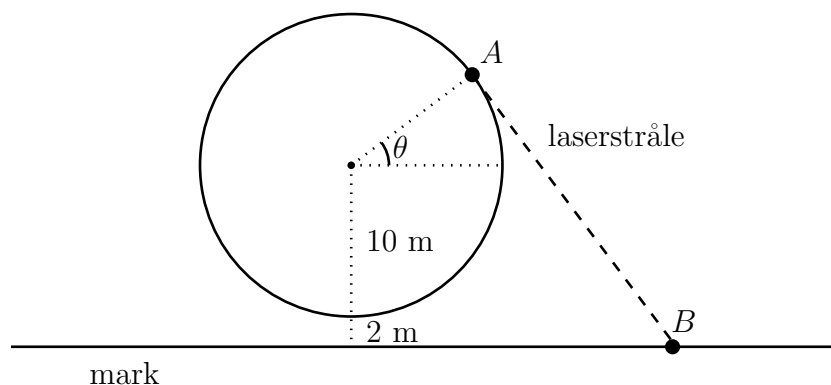
8. För vilka värden på konstanten $a > 0$ har ekvationen

$$\ln x = ax^2$$

minst en lösning?

9. En rak cirkulär kon med totalarea (mantelyta+basyta) π areaenheter skall konstrueras. Hur skall konen dimensioneras för att få så stor volym som möjligt?

10. Adam, punkt A , är passagerare i ett roterande pariserhjul med radien 10 meter, vars nedre del är 2 meter över marken (se figur). Han håller en laserpenna som han hela tiden pekar i tangentens riktning, och laserstrålen träffar marken i punkt B . I ett visst ögonblick, när vinkeln θ i figuren är $\pi/4$, och Adam är på väg uppåt, gäller det att hjulet roterar med farten 1 varv per minut. Med vilken fart längs marken avlägsnar sig punkten B i detta ögonblick?



LYCKA TILL!