

INGA HJÄLPMEDEL. Lösningarna ska vara försedda med ordentliga motiveringar. Lämnna tydliga svar. Varje uppgift kan som mest ge 3 poäng.

Godkäntdel

För att bli godkänd krävs dels högst en uppgift med 0 poäng av dessa sex uppgifter, dels minst 9 poäng av 18 möjliga.

1. Beräkna gränsvärdena

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{x+1} - x^3 + \ln x}{2e^x + x^2}, \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 2x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{2/\ln x}.$$

2. Rita grafen till funktionen

$$f(x) = \frac{2x + 1}{e^{x^2}}.$$

Ange speciellt eventuella lokala extrempunkter.

3. Ekvationen

$$z^3 - 3iz^2 - 4iz - 2i - 4 = 0$$

har roten $z = i$. Bestäm övriga rötter. Rötterna skall ges på formen $a + bi$.

4. Skriv ner Maclaurins formel, med restterm på Lagranges form. Använd Maclaurinutveckling för att bestämma gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^{x^2} - \cos x)}{2x - \sin 2x}.$$

5. Definiera vad som menas med derivatan av en funktion f i en punkt a . Använd sedan derivatans definition för att härleda derivatan av $\sin x$. (Gränsvärdet $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$ får användas utan bevis.) Härled slutligen derivatan av $\arcsin x$ genom att utgå från derivatan av sinus samt formeln för derivata av en invers.
6. En rektangulär poster bestående av en rektangulär bild och vita marginaler skall tillverkas. Själva bildens area skall vara 150 cm^2 , de båda sidomarginalerna 3 cm vardera samt topp- och bottenmarginal 2 cm vardera. Vilken är den minsta area en sådan poster kan ha?

VAR GOD VÄND!

Överbetygsdel

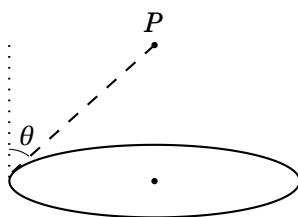
Om du klarat föregående del har du chans på överbetyg. För att få betyg 4 krävs minst 4 poäng på denna del. För betyg 5 krävs minst 7 poäng.

7. En sten som släpps ner i en damm orsakar en cirkulär krusning på vattenytan. Vid en viss tidpunkt är radien av krusningen 7 meter och radien ökar då med farten 1.5 meter per sekund. Med vilken hastighet ändrar sig, vid denna tidpunkt, den area som krusningen omsluter?
8. Definiera vad som menas med att serien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ är konvergent. Avgör för vilka värden på x som serien

$$\sum_{k=0}^{\infty} (x+1)^{-k}$$

är konvergent. Vad blir seriens summa för dessa värden på x ?

9. En ljuskälla P skall hängas upp rakt ovanför centrumpunkten av ett cirkelformat bord med radie R . Hur högt ovanför bordet skall P placeras för att ljusintensiteten skall bli så stor som möjligt vid bordets kant. Ljusintensiteten antas vara proportionell mot $\frac{\cos\theta}{r^2}$, där θ är infallsvinkeln (se figuren) och r är avståndet från ljuskällan.



10. För vilka positiva heltal n gäller det att

$$(\sin x + i \cos x)^n = \sin nx + i \cos nx$$

för alla reella tal x ? (Observera att detta *inte* är DeMoivres formel, då cosinus och sinus här är "omkastade".)

LYCKA TILL!