

*INGA HJÄLPMEDEL. Lösningarna ska vara försedda med ordentliga motiveringar. Lämnna tydliga svar. Varje uppgift kan som mest ge 3 poäng.*

### Godkäntdel

*För att bli godkänd krävs dels högst en uppgift med 0 poäng av dessa sex uppgifter, dels minst 9 poäng av 18 möjliga.*

1. Definiera vad som menas med derivatan  $f'(a)$  av en funktion  $f$ . Derivera sedan funktionen

$$f(x) = \ln((x+3)\sqrt{x^2+1}).$$

2. Beräkna gränsvärdena

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 - 4x}), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)}{e^{4x} - 1}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x}.$$

3. Rita grafen till funktionen

$$f(x) = \frac{x^2 + 4x + 7}{3x + 3}.$$

Ange speciellt eventuella lokala extrempunkter och asymptoter.

4. Lös ekvationen  $(z - 3i)^3 = 8i$ . Lösningarna skall ges på formen  $a + bi$ .
5. Skriv ner Maclaurins formel, med restterm på Lagranges form. Låt  $f(x) = (1 + 2x)^{3/2}$ , och bestäm ett polynom  $p(x)$  sådant att

$$|f(x) - p(x)| \leq 2x^2 \quad \text{för alla } |x| < \frac{1}{8}.$$

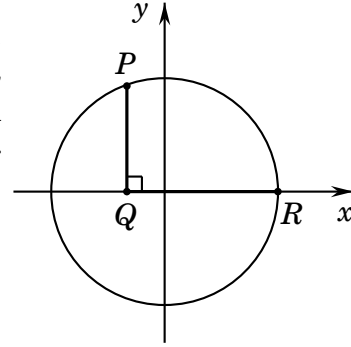
6. En låda med kvadratisk bottenplatta, men utan lock, skall byggas. Den skall rymma  $6 \text{ dm}^3$ . Bestäm minsta möjliga materialkostnad om kostnaden för bottenplattan är  $3 \text{ kr/dm}^2$  och kostnaden för sidoplattorna är  $2 \text{ kr/dm}^2$ .

VAR GOD VÄND!

## Överbetygsdel

Om du klarat föregående del har du chans på överbetyg. För att få betyg 4 krävs minst 4 poäng på denna del. För betyg 5 krävs minst 7 poäng.

7. Låt  $P$  vara en punkt på den övre halvan av enhetscirkeln, och låt  $Q$  vara den punkt på  $x$ -axeln som gör att linjestycket  $PQ$  blir vinkelrätt mot  $x$ -axeln. Låt vidare  $R$  vara punkten  $(1, 0)$ . Hur skall punkten  $P$  väljas så att summan av längderna av linjestyckena  $PQ$  och  $QR$  blir så stor som möjligt?



8. Använd Maclaurinutveckling för att bestämma konstanten  $a$  så att gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} \sin x - \ln(x+1)}{x^3}$$

existerar ändligt. Beräkna sedan gränsvärdet för detta värde på  $a$ .

9. För vilka värden på konstanten  $a$  gäller det att funktionen  $f(x) = \cos 2x - a \cos x$  antar varje funktionsvärde högst en gång i intervallet  $0 < x < \pi$ ?
10. En löpare  $P$  springer moturs på en cirkelformad löparbana med radie 100 m, och betraktas av en åskådare  $Q$  som befinner sig på avståndet 200 från löparbanans medelpunkt. Vid en viss tidpunkt, då avståndet mellan löparen och åskådaren (dvs. längden av  $PQ$ ) är  $100\sqrt{7}$  m, har löparen farten 5 m/s. Med vilken fart ändras avståndet mellan löparen och åskådaren vid denna tidpunkt?

LYCKA TILL!