

INGA HJÄLPMEDEL. Lösningarna ska vara försedda med ordentliga motiveringar.

1. Skissera grafen till funktionen

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 2}, \quad x \neq 2.$$

Ange speciellt eventuella lokala extrempunkter och asymptoter.

2. Beräkna följande gränsvärden:

a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - x}$  (0.2)      b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt{x^2 + \frac{1}{2}x} - x \right)$  (0.3)

c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{5x} \right)^x$  (0.2)      d)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \arctan \left( \frac{1}{\ln x} \right)$  (0.3).

3. a) Skriv det komplexa talet  $(1 + \sqrt{3}i)^{50}$  på formen  $a + bi$ . (0.4)

- b) Polynomen

$$p(z) = z^2 + (2 - 2i)z - 4i \quad \text{och} \quad q(z) = z^4 - 2iz^3 - iz - 2$$

har ett gemensamt nollställe. Bestäm samtliga komplexa nollställena till de båda polynomen. Svara på formen  $a + bi$ . (0.6)

4. a) Definiera vad som menas med Maclaurinpolynomet  $p_n(x)$  av ordning  $n$  till en funktion  $f$ . Bestäm sedan Maclaurinpolynomet  $p_2(x)$  av ordning 2 till funktionen  $f(x) = \cos(3x)$ , och visa att

$$|\cos(3x) - p_2(x)| < 5 \cdot 10^{-3} \quad \text{då} \quad |x| < \frac{1}{10}. \quad (0.7)$$

- b) Definiera vad som menas med Taylorpolynomet av ordning  $n$ , kring punkten  $a$ , till en funktion  $f$ . Bestäm sedan Taylorpolynomet av ordning 2, kring punkten  $\pi/3$ , till funktionen  $f(x) = \cos(3x)$ . (0.3)

5. a) Formulera definitionen av vad som menas med derivatan av en funktion  $f$ . Använd sedan denna definition för att härleda derivatan av funktionen

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0. \quad (0.5)$$

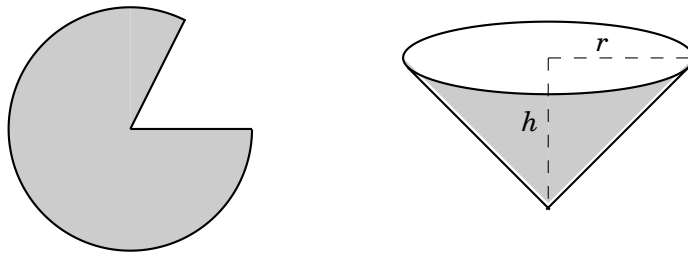
- b) Antag att vi har två parallellkopplade resistorer vars resistanser  $R_1$  och  $R_2$ , angivna i Ohm ( $\Omega$ ), varierar med tiden. Deras totala resistans  $R$  ges i varje ögonblick av formeln

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Vid en viss tidpunkt gäller det att  $R_1 = 2 \Omega$  och  $R_2 = 6 \Omega$ . Vid samma tidpunkt ökar  $R_1$  med hastigheten  $0.5 \Omega/\text{min}$  samtidigt som  $R_2$  minskar med hastigheten  $3 \Omega/\text{min}$ . Ökar eller minskar den totala resistansen  $R$  vid denna tidpunkt? Med vilken hastighet? (0.5)

VAR GOD VÄND!

6. En konformad pappersmugg med volymen  $\pi/3$  liter skall skapas genom att först klippa bort en cirkelsektor ur ett cirkelformat pappersark och sedan limma ihop de raka kanterna. Bestäm radien  $r$  och höjden  $h$  för muggen så att det går åt så lite papper som möjligt. (Volymen av en rak cirkulär kon ges av en tredjedel av produkten av basytans area och konens höjd.)



LYCKA TILL!